Instrucciones:

- La duración del examen es de tres horas.
- Puedes conservar esta hoja de enunciados.
- Recuerda poner el nombre en las hojas que entregues.

1) [2 puntos] Demuestra la igualdad

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \qquad \text{con} \quad \Re(s) > 1$$

donde $\Lambda(n)$ es la función de von Mangoldt que vale $\log p$ si $n = p^k$ con p primo y $k \in \mathbb{Z}^+$ y es nula en el resto de los casos. No es obligatorio discutir la convergencia, basta probarla como una identidad formal.

2) [2 puntos] Calcula la fracción continua de $\sqrt{n^2 + n + \frac{1}{2}}$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ arbitrario.

3) [2 puntos] Sea $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que la fracción continua de $\sqrt{N}$ es $[n+2, \overline{1, 1, 1, 2n+4}\,]$ para cierto $n \in \mathbb{Z}^+$. Demuestra que n es múltiplo de 3.

4) [1.5 puntos] Halla el menor entero positivo k que verifica $n^k \equiv 1\ (140)$ para todo entero n tal que n y 140 sean coprimos.

5) [1.5 puntos] Demuestra que $\alpha = 0{,}135791113151719 21\ldots$ no es un decimal periódico (ni puro ni mixto) y por tanto $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

6) [1 punto] Encuentra una fórmula que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ produzca una solución $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ de la ecuación

$$25x^2 + 14xy + 2y^2 = 2023^{2n} + 9.$$

Indicación: Busca una forma cuadrática lo más sencilla posible equivalente a la del primer miembro.