
Instrucciones:

- La duración del examen es de tres horas.
 - Puedes conservar esta hoja de enunciados.
 - Recuerda poner el nombre en las hojas que entregues.
-

- 1) [2 puntos] Expresa $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)/n^s$ en términos de la función ζ .
- 2) [2 puntos] Prueba que todos los primos $p > 2$ que dividen a $9n^2 + 6n + 4$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ cumplen $3 \mid p - 1$.
- 3) [2 puntos] Calcula la fracción continua de $\sqrt{n^2 + n + \frac{1}{2}}$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ arbitrario.
- 4) [2 puntos] Prueba que las convergentes p_n/q_n de $\sqrt{2} = [1, \bar{2}]$ verifican $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ y $q_{n+1} = p_n + q_n$ para $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
- 5) [1 punto] Para $n \in \mathbb{Z}^+$, demuestra la fórmula
- $$\sum_{k|210} \mu(k) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = \#\{1 \leq k \leq n : \gcd(k, 210) = 1\}$$
- donde $\lfloor x \rfloor$ indica la parte entera de x .
- 6) [1 punto] Encuentra una matriz de $SL_2(\mathbb{Z})$ que muestre que $5x^2 - 34xy + 58y^2$ es equivalente a $x^2 + y^2$.
-