1) Sean $a, b \in \mathbb{Z}^+$ coprimos y $c \in \mathbb{Z}^+$ con $a \nmid c$, $b \nmid c$.

a) [50 %] Demuestra que si $ab - a - b < c < ab$ entonces la ecuación $ax + by = c$ tiene solución positiva única, $x, y \in \mathbb{Z}^+$.

b) [50 %] Determina todos los a y b tales que haya dos soluciones positivas para $c = ab + 5$.

General. Para a y b coprimos, sabemos por la teoría que todas las soluciones enteras de $ax + by = c$ vienen parametrizadas por

$$(*) \qquad x = cx_0 + bt, \quad y = cy_0 - at \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{Z}, \quad ax_0 + by_0 = 1.$$

a) Existencia. Como en (*) la x se incrementa de b en b, existe un t que da $0 \le x < b$. De hecho, $1 \le x < b$ porque $x = 0$ implica $b \mid c$ en contra de las hipótesis. Entonces $by = c - ax > ab - a - b - a(b-1) = -b$, esto es, $y > -1$. De nuevo $y = 0$ es imposible porque $a \nmid c$, por tanto la solución (x, y) correspondiente al t elegido es positiva.

a) Unicidad. Sean (x_1, y_1), (x_2, y_2) dos soluciones distintas, digamos con $x_1 > x_2$, entonces $x_1 \ge x_2 + b$, por el espaciamiento antes indicado, y $by_1 = c - ax_1 \le c - ab - ax_2 < 0$, lo cual es una contradicción.

b) El caso $c = ab + 5$. Con la notación del apartado anterior, $a(x_1 - b) + by_1 = 5$ con $x_1 - b, y_1 > 0$. Por tanto, $a + b \le 5$. Para respetar las hipótesis del enunciado debe tenerse $a, b \ne 1$ y $a \ne b$. Las únicas posibilidades son $(a, b) = (2, 3)$ y $(3, 2)$. Ambos casos son simétricos y aplicando (*) con $x_0 = -1$, $y_0 = 1$ vemos que efectivamente $2x + 3y = 11$ tiene dos soluciones positivas, a saber, $(x, y) = (1, 3)$, $(4, 1)$.