Aquí se recogen los primeros casos:

$$\sqrt{2} = [1, \overline{2}], \qquad \sqrt{3} = [1, \overline{1, 2}], \qquad \sqrt{5} = [2, \overline{4}], \qquad \sqrt{6} = [2, \overline{2, 4}],$$
$$\sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}], \qquad \sqrt{8} = [2, \overline{1, 4}], \qquad \sqrt{10} = [3, \overline{6}], \qquad \sqrt{11} = [3, \overline{3, 6}].$$

Un par de ejemplos con números mayores, ilustran la simetría del periodo:

$$\sqrt{46} = [6, \overline{1, 3, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 12}], \qquad \sqrt{73} = [8, \overline{1, 1, 5, 5, 1, 1, 16}].$$

Más adelante (Lema 3.3.9) encontraremos una explicación a por qué el periodo comienza tras a_0 y por qué aparece $2a_0$.

3.3. Aproximación óptima

Acotación del error. Resultados de aproximación. La ecuación de Pell.

Un poco de experimentación nos convencerá de que las convergentes de un número irracional lo aproximan muy rápidamente. El error admite una fórmula en cierto modo explícita con lo que sabemos:

Lema 3.3.1. *Para $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ se cumple*

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(q_n\alpha_{n+1} + q_{n-1})} \qquad \textit{con} \quad \alpha_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots].$$

Demostración. Basta aplicar el Lema 3.2.5 con $x = \alpha_{n+1}$. □

Menos preciso, pero más ilustrativo es:

Proposición 3.3.2. *Para $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ se tiene*

$$\frac{1}{q_{n+2}} < |q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}} \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Demostración. La cota superior se sigue del Lema 3.3.1, porque $\alpha_{n+1} > a_{n+1}$, y la inferior usando $\alpha_{n+1} < a_{n+1} + 1$ ya que $q_n(a_{n+1} + 1) + q_{n-2}$ es $q_{n+1} + q_n$, que no supera a q_{n+2}. □

Los denominadores de las convergentes tienen en el peor de los casos un crecimiento geométrico. No es difícil probar por inducción $q_n > 2^{(n-1)/2}$ para $n > 1$ [35]. Por eso las aproximaciones mediante convergentes de la fracción continua son tan buenas. No solo eso, sino que son, en cierto sentido, las aproximaciones óptimas. Gran parte de esta afirmación depende del siguiente resultado:

Proposición 3.3.3. *Sea $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ con convergentes $\{p_n/q_n\}_{n=0}^{\infty}$. Si a/q cumple $q_{n-1} < q < q_n$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces $|q\alpha - a| > |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$.*

Demostración. Sea $\lambda_n = aq_n - qp_n$. Usando la Proposición 3.2.1 se deduce la igualdad

$$|q\alpha - a| = \big|\lambda_{n-1}(q_n\alpha - p_n) - \lambda_n(q_{n-1}\alpha - p_{n-1})\big|.$$

Los enteros λ_{n-1} y λ_n son no nulos porque $a/q \neq, p_{n-1}/q_{n-1}, p_n/q_n$ ya que son fracciones irreducible de diferente denominador.

Por otro lado, $q = |\lambda_{n-1}q_n - \lambda_n q_{n-1}|$, por tanto λ_{n-1} y λ_n deben tener el mismo signo, ya que en otro caso $q > q_n$. También sabemos que $q_n\alpha - p_n$ y $q_{n-1}\alpha - p_{n-1}$ tienen distinto signo por el Lema 3.3.1, entonces necesariamente $|q\alpha - a|$ es mayor que $|\lambda_n||q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$. □

En la línea de los resultados anteriores, hay dos maneras de medir el error al aproximar un irracional α por un racional a/q, llamadas de *primera especie* y de *segunda especie*. La primera es el error habitual, en valor absoluto, $|\alpha - a/q|$. La segunda es el error relativo al tamaño del denominador, $|q\alpha - a|$. Lo que trata de recoger esta última es la aspiración de conseguir buenas aproximaciones con denominadores pequeños y la teoría queda algo más elegante para ella.

El resultado de mejor aproximación es casi un corolario de la Proposición 3.3.3.

▶ **Teorema 3.3.4.** *Sea $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ con convergentes $\{p_n/q_n\}_{n=0}^{\infty}$. Para cualquier $a/q \neq p_n/q_n$ con $1 < q \leq q_n$ se cumple*

$$\Big|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\Big| < \Big|\alpha - \frac{a}{q}\Big| \qquad \textit{y} \qquad \big|q_n\alpha - p_n\big| < \big|q\alpha - a\big|.$$

Es decir, cada convergente aproxima mejor que cualquier otra fracción con denominador menor o igual que el suyo.

Demostración. La segunda desigualdad implica la primera porque

$$\Big|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\Big| = \frac{1}{q_n}\big|q_n\alpha - p_n\big| \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{q_n}\big|q\alpha - a\big| \leq \Big|\alpha - \frac{a}{q}\Big|.$$

Gracias a la Proposición 3.3.2 sabemos que $\big|q_n\alpha - p_n\big|$ es decreciente en n, por tanto podemos suponer $q_{n-1} < q \leq q_n$. Si $q \neq q_n$ el resultado es consecuencia de la Proposición 3.3.3. Si $q = q_n$, apelando de nuevo a la Proposición 3.3.2 y a la desigualdad triangular,

$$2\big|q_n\alpha - p_n\big| < \frac{2}{q_{n+1}} \leq 1 \leq \big|a - p_n\big| \leq \big|a - q\alpha\big| + \big|q_n\alpha - p_n\big|$$

y se deduce la desigualdad buscada. □

Se puede apurar un poco más, a costa de complicar el enunciado, y caracterizar las mejores aproximaciones cuando limitamos el denominador por un número arbitrario.

▶ **Teorema 3.3.5.** *Dado* $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *y* $Q \in \mathbb{Z}^+$*, sea* q_n *con* $q_n \le Q < q_{n+1}$*, entonces para cualquier* $a/q \neq p_n/q_n$ *con* $q \le Q$

$$\left|q_n\alpha - p_n\right| < \left|q\alpha - a\right|$$

y eligiendo J *tal que* $Jq_n + q_{n-1} \le Q < (J+1)q_n + q_{n-1}$*,*

$$\text{mín}\Big(\Big|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\Big|, \Big|\alpha - \frac{Jp_n + p_{n-1}}{Jq_n + q_{n-1}}\Big|\Big) < \Big|\alpha - \frac{a}{q}\Big|$$

para cualquier $a/q \neq p_n/q_n, (Jp_n + p_{n-1})/(Jq_n + q_{n-1})$ *con* $q \le N$*.*

En definitiva, cuando se restringe el tamaño máximo del denominador, si el mínimo del error habitual no se alcanza en una convergente, entonces se alcanza en una fracción del tipo $(Jp_n + p_{n-1})/(Jq_n + q_{n-1})$. A veces se les llama *semiconvergentes*.

Por dar un ejemplo, las primeras convergentes de $\log 2$ son $\{p_n/q_n\}_{n=0}^5 = \{0, 1, 2/3, 7/10, 9/13, 61/88\}$. Si limitamos el denominado a $q \le 70$ la última convergente que podemos escoger es $9/13$ que da lugar a un error de aproximadamente $8{,}3 \cdot 10^{-4}$, sin embargo $43/62$, que es $(4 \cdot 9 + 7)/(4 \cdot 13 + 10)$, baja el error hasta $4{,}0 \cdot 10^{-4}$.

Demostración. Si $q \neq q_n$ la primera parte es consecuencia directa de la Proposición 3.3.3 y el caso $q = q_n$ admite un tratamiento similar al de la prueba anterior.

Para la segunda parte empleamos la notación del Lema 3.2.5 y escribimos $f(J) = (Jp_n + p_{n-1})/(Jq_n + q_{n-1})$. La función f es monótona y suponiendo n par se cumple

$$f(\infty) = \frac{p_n}{q_n} < \alpha < f(a_{n+1}) = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \le f(J) \le f(0) = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}.$$

Si n es impar se obtiene lo mismo cambiando el sentido de las desigualdades. En cualquier caso, si a/q estuviera más cerca de α que p_n/q_n y $f(J)$, entonces pertenecería al intervalo que determinan y $\left|f(J) - p_n/q_n\right|$ sería igual a

$$\Big|\frac{a}{q} - \frac{p_n}{q_n}\Big| + \Big|f(J) - \frac{a}{q}\Big| \ge \frac{1}{qq_n} + \frac{1}{q(Jq_n + q_{n-1})} > \frac{Q}{qq_n(Jq_n + q_{n-1})},$$

donde se ha usado la hipótesis $Q < (J+1)q_n + q_{n-1}$. Esto lleva a una contradicción porque el Lema 3.2.5 muestra que $q_n(Jq_n + q_{n-1})$ multiplicado por $\left|f(J) - p_n/q_n\right|$ es 1. $\square$

Una consecuencia indirecta de la Proposición 3.3.3 es que con que ganemos un factor $1/2$ en el Corolario 3.1.2, estaremos en presencia de una convergente.

Proposición 3.3.6. *Sea* $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. *Si* a/q *verifica*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$$

entonces a/q *es una convergente de* α

Demostración. Si no lo fuera, tomemos $q_{n-1} < q < q_n$. Por la desigualdad triangular y la Proposición 3.3.3

$$1 \le \left|qp_{n-1} - aq_{n-1}\right| \le q\left|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}\right| + q_{n-1}\left|a - q\alpha\right| < (q + q_{n-1})\left|q\alpha - p\right|$$

y esto contradice nuestra hipótesis porque $q_{n-1} < q$. □

Este resultado tiene implicaciones para la *ecuación de Pell*, que es la ecuación diofántica de segundo grado

$$x^2 - Dy^2 = 1. \tag{3.1}$$

donde $D \in \mathbb{Z}^+$ no es un cuadrado perfecto.

Corolario 3.3.7. *Si* $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ *es solución de la ecuación de Pell entonces* x_0/y_0 *es una convergente de* $\sqrt{D}$.

Demostración. Utilizando la factorización $x^2 - Dy^2 = (x - \sqrt{D}y)(x + \sqrt{D}y)$ en $\mathbb{R}[x, y]$, se deduce

$$\left|\sqrt{D} - \frac{x_0}{y_0}\right| = \frac{1}{y_0(x_0 + \sqrt{D}y_0)} < \frac{1}{2y_0^2}.$$

La última desigualdad se justifica porque $x_0 > y_0$. □

La pregunta natural es qué convergentes dan lugar a soluciones. Un poco de experimentación nos lleva a intuir que siempre los índices son impares y forman una progresión aritmética. Por ejemplo para $D = 2$ las soluciones corresponden a las convergentes p_{2n+1}/q_{2n+1} de $\sqrt{2}$, mientras que para $D = 33$ debemos considerar las convergentes p_{4n+3}/q_{4n+3} de $\sqrt{33}$.

▶ **Teorema 3.3.8.** *Sea* k *la longitud del periodo de la fracción continua de* $\sqrt{D}$ *y* $\{p_n/q_n\}_{n=0}^{\infty}$ *sus convergentes entonces* $(x, y) = (p_m, q_m)$ *con* m *impar tal que* $k \mid m + 1$ *son soluciones de* (3.1).

En particular, la ecuación de Pell tiene siempre infinitas soluciones. Se puede probar todas sus soluciones positivas son de esa forma [50, Th. 11.10] [41, Th. 7.6.27], aunque no lo veremos aquí. También hay una fórmula para expresar todas las soluciones en funciones de la menor [25, Th. 9.2]. Cuando una raíz cuadrada tiene un periodo muy largo, debido al crecimiento geométrico de los denominadores de las convergentes las soluciones más pequeñas de la ecuación de Pell son enormes. Un ejemplo extremo es $D = 2011$, para el que la ecuación tiene una solución positiva mínima con números de más de 40 dígitos.

Sin entrar en ejemplos tan patológicos, consideremos $x^2 - 13y^2 = 1$. La fracción continua de $\sqrt{13}$ es $[3, \overline{1,1,1,1,6}\,]$ con periodo $k = 5$. Según el Teorema 3.3.8, la convergente p_9/q_9 da una solución positiva:

	3	1	1	1	1	6	1	1	1	1	6
0	1	3	4	7	11	18	119	137	256	393	**649**
1	0	1	1	2	3	5	33	38	71	119	**180**

Por lo dicho anteriormente, $(649, 180)$ es en realidad la menor solución positiva.

Un ingrediente de la prueba del Teorema 3.3.8 es una parte de la explicación de la estructura de la fracción continua de las raíces cuadradas.

Lema 3.3.9. *Si $D \in \mathbb{Z}^+$ no es un cuadrado perfecto entonces la fracción continua de $\alpha = \sqrt{D} + \lfloor\sqrt{D}\rfloor$ es periódica pura. En particular, la fracción continua de $\sqrt{D}$ es siempre de la forma $[a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2a_0}\,]$.*

Demostración. Denotemos con un asterisco el conjugado real en $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, es decir, $(a + b\sqrt{D})^* = a - b\sqrt{D}$ para $a, b \in \mathbb{Q}$. Es evidente que $-1 < \alpha^* = \alpha_0^* < 0$. El algoritmo de la Proposición 3.2.4 implica $\alpha_{j+1}^* = 1/(\alpha_j^* - a_j)$ y como $a_j \in \mathbb{Z}^+$ para $j > 0$, se deduce inductivamente $-1 < \alpha_j^* < 0$ para todo j.

Si la fracción continua de α no fuera periódica pura, existirían enteros positivos k y p (la longitud del periodo) tales que $\alpha_k = \alpha_{k+p}$ y $\alpha_{k-1} \neq \alpha_{k+p-1}$. Ahora bien, en esa situación, de nuevo por el algoritmo,

$$0 \neq \alpha_{k-1} - \alpha_{k+p-1} = \Big(a_{k-1} + \frac{1}{\alpha_k}\Big) - \Big(a_{k+p-1} + \frac{1}{\alpha_{k+p}}\Big) = a_{k-1} - a_{k+p-1} \in \mathbb{Z}$$

y se llega a una contradicción porque $\alpha_{k-1}^* - \alpha_{k+p-1}^* \in (-1, 1)$.

La última afirmación del enunciado viene de que la parte entera de α es igual a $2a_0$ con $a_0 = \lfloor\sqrt{D}\rfloor$, por tanto $\alpha = [\overline{2a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}}\,]$ y basta restar a_0 en ambos miembros. $\square$

Demostración del Teorema 3.3.8. Por el Lema 3.3.9 se tiene

$$\sqrt{D} = [a_0, a_1, \dots, a_n, a_0 + \sqrt{D}] \qquad \text{para} \quad n = k - 1. \tag{3.2}$$

Gracias al Lema 3.2.5, esto se traduce en

$$\sqrt{D} = \frac{p_n(\sqrt{D} + a_0) + p_{n-1}}{q_n(\sqrt{D} + a_0) + q_{n-1}} \quad \text{que implica} \quad \begin{cases} p_{n-1} = Dq_n - a_0 p_n, \\ q_{n-1} = p_n - a_0 q_n, \end{cases}$$

simplemente quitando el denominador y comparando coeficientes de 1 y $\sqrt{D}$. Si ahora sustituimos en $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n+1}$ (Proposición 3.2.1), se obtiene $p_n^2 - Dq_n^2 = (-1)^{n+1}$ y se llega a una solución de la ecuación de Pell cuando $n = k - 1$ es impar.

Por otro lado, (3.2) es también cierto si $n = \ell k - 1$ con $\ell \in \mathbb{Z}^+$, por consiguiente todas las convergentes p_n/q_n con $n \equiv -1\ (k)$ y n impar, dan lugar a soluciones. $\square$