Esta es una justificación de la estimación

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\mu(k)}{k^2} = \frac{6}{\pi^2} + O(N^{-1})$$

que en clase solo expliqué parcialmente y que utilicé para estudiar el comportamiento asintótico del promedio de φ.

Claramente,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\mu(k)}{k^2} = D_\mu(2) - \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2}.$$

Sabemos que $D_\mu = 1/\zeta$ y que $\zeta(2) = \pi^2/6$ (problema de Basilea). Por tanto solo resta notar

$$\Big| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} \Big| \le \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \le \int_N^\infty \frac{dx}{x^2} = O(N^{-1}),$$

donde se ha usado la comparación con sumas de Riemann (explicada en clase) para acotar por la integral. Recuerda que si f es decreciente, $\int_N^\infty f(x)\,dx \le \sum_{n=N}^\infty f(n) \le \int_{N-1}^\infty f(x)\,dx$, siempre que las integrales converjan. Esto se deduce de $f(n+1) \le \int_n^{n+1} f \le f(n)$.