2.2. Acerca de la distribución de los primos

Una prueba analítica de Euler. Extensión analítica. El teorema de los números primos. La hipótesis de Riemann.

Todos conocemos una prueba elemental de la infinitud del conjunto de los primos, quizá varias. Veamos ahora una muy breve, no tan elemental, debida a Euler que es precursora de los métodos analíticos en teoría de números.

El punto de partida es $\zeta(1^+) = \infty$. Con los baremos de rigor con los que se movía Euler esto no requería ninguna justificación porque $\zeta(1)$ es formalmente la serie armónica que diverge. Hoy en día somos más exigentes y seguramente nos quedamos más tranquilos usando sumas de Riemann y escribiendo $\zeta(1+\epsilon) > \int_2^\infty x^{-1-\epsilon}\, dx = 2^{-\epsilon}\epsilon^{-1}$ para todo $\epsilon > 0$.

En cualquier caso, usando el producto de Euler (2.2)

$$\lim_{\sigma\to 1^+} \prod_p (1-p^{-\sigma})^{-1} = \infty.$$

Ahora bien, esto es una contradicción clara si el producto es finito, pues cada factor tiene límite finito.

Cabe pensar que esta prueba no comporta ninguna ventaja con respecto a las elementales pues requiere el concepto de límite. Sin embargo, da más información pues nos dice que los primos no pueden crecer muy deprisa porque ello causaría la convergencia del producto. Así estamos seguros de que si p_n es el primo n-ésimo ninguna fórmula asintótica del tipo $p_n \sim Kn^\alpha$ puede ser correcta. Apurando más, $n(\log n)^\alpha = O(p_n)$ debe ser falso para cualquier $\alpha > 1$. Si p_n crece demasiado despacio, ζ tenderá rápidamente a ∞ cuando $s \to 1^+$. La pregunta es qué crecimiento de los primos es compatible con la verdadera singularidad que tiene ζ. Si crecen muy rápido no hay singularidad en absoluto y si crecen muy lento, la singularidad es demasiado grande. En gran medida la teoría analítica de números trata de extraer información aritmética a partir de singularidades de funciones.

Todo el argumento anterior se mueve en valores reales de s cercanos a 1. Sin embargo, Riemann mostró que para capturar todos los detalles de la distribución de los primos hay que fijarse también en valores complejos que no están cercanos a la singularidad y que escapan del ámbito de la serie de Dirichlet original (2.1).

Todo esto motiva el estudio de la singularidad de ζ en $s = 1$ y buscar expresiones alternativas que permitan entender mejor ζ como función compleja. Para nuestros propósitos, el siguiente resultado será suficiente.

Lema 2.2.1. *Para* $\Re(s) > 1$ *se tiene*

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{\operatorname{Frac}(x)}{x^{s+1}}\, dx$$

donde $\operatorname{Frac}(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Demostración. Para $n \le x < n+1$ se tiene $\operatorname{Frac}(x) = x - n$, por tanto

$$\int_n^{n+1} \frac{\operatorname{Frac}(x)}{x^{s+1}}\,dx = \frac{1}{1-s}\Big(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}}\Big) + \frac{n}{s}\Big(\frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s}\Big).$$

Al sumar en n el primer paréntesis es una suma telescópica. Así pues,

$$s\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Frac}(x)}{x^{s+1}}\,dx = -\frac{s}{1-s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s}.$$

Si en la primera suma renombramos $n+1 \mapsto n$, se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)-n}{n^s} = -\zeta(s)$$

y esto prueba el resultado. □

Corolario 2.2.2. *La función $\zeta(s) - (s-1)^{-1}$ tiene una extensión holomorfa a $\Re(s) > 0$.*

Demostración. La diferencia $s/(s-1) - (s-1)^{-1}$ es idénticamente uno para $s \ne 1$ y la integral es holomorfa por el teorema de Morera [4]. □

Otra forma de decir lo mismo es que ζ tiene una extensión meromorfa a $\Re(s) > 0$ con un único polo en $s = 1$ de residuo 1. Riemann fue más lejos y probó que existe una extensión meromorfa a todo $\mathbb{C}$, con este único polo. Es decir, $\zeta(s) - (s-1)^{-1}$ se extiende a una función entera. En la bibliografía usual se llama ζ a la extensión meromorfa a $\mathbb{C}$ más que al trozo en $\Re(s) > 1$ definido en (2.1). Por otro lado, Riemann también probó que ζ tiene una simetría oculta que relaciona los valores $\zeta(s)$ y $\zeta(1-s)$. La extensión a $\mathbb{C}$ la podríamos hacer con una variante de la prueba del Lema 2.2.1, esencialmente integrar por partes sucesivamente [28, Th. 1.2], mientras que la simetría es más complicada (véanse en [53, II] varias pruebas).

Antes de seguir con la función ζ, vamos a pararnos a examinar qué esperamos del comportamiento a la larga de los primos. Gauss consideró la función contadora de los primos que hoy definimos como

$$\pi(x) = \big|\{p \le x \,:\, p \text{ es primo}\}\big|$$

permitiendo que $x \ge 2$ sea real, aunque, por supuesto, toda la información está en los enteros positivos. Con su destacable habilidad numérica y extensas tablas de primos, concluyó que $\pi(x)$ se parecía a $\int_2^x dt/\log t$, la función llamada *logaritmo integral*. Sin embargo, tuvieron que pasar muchos años (y la famosa memoria de Riemann por en medio) para que C.J. de la Vallée Poussin y J. Hadamard demostraran en 1896 que el error relativo tiende a cero. Es decir:

▶ **Teorema 2.2.3** (Teorema de los números primos). *Cuando $x \to \infty$,*

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) \qquad \textit{donde} \quad \mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

En realidad, esta formulación es equivalente a otra mucho más simple:

Corolario 2.2.4. *Se cumple*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad \textit{para } x \to \infty.$$

Demostración. Se verifica $\text{lím}\,\mathrm{Li}(x)/f(x) = 1$ con $f(x) = x/\log x$ simplemente aplicando la regla de l'Hôpital. □

También se puede enunciar como una asintótica sencilla de los números primos.

Corolario 2.2.5. *Si p_n es el n-ésimo primo,*

$$p_n \sim n\log n \qquad \textit{cuando } n \to \infty.$$

Demostración. El Corolario 2.2.4 implica $n\log p_n \sim p_n$ ya que por definición, $\pi(p_n) = n$. Tomando logaritmos se deduce $\log n \sim \log p_n$ (porque $(\log\log p_n)/\log p_n$ tiende a cero). Multiplicando estas dos fórmulas asintóticas se obtiene el resultado. □

A pesar de la equivalencia de estos resultados, hay una gran diferencia numérica. En la línea de lo que consideró Gauss, $\mathrm{Li}(x)$ se parece mucho a $\pi(x)$ en el sentido de que el error relativo tiende a cero con cierta rapidez, mientras que en los corolarios los errores relativos tienden muy lentamente a cero, como el inverso de un logaritmo. Por ejemplo,

$$\frac{\pi(10^8) - \mathrm{Li}(10^8)}{\pi(10^8)} = -0{,}00013\ldots \quad \text{y} \quad \frac{\pi(10^8) - 10^8/\log(10^8)}{\pi(10^8)} = 0{,}057\ldots$$

Por otro lado, $p = 10^8 + 7$ es el primo en el lugar $n = 5761456$ y al emplear $n\log n$ como aproximación el error relativo es de algo más de una décima.