Me habéis pedido una demostración del teorema chino del resto en su versión para anillos. Es decir, que dados $m_1, m_2, \ldots, m_N \in \mathbb{Z}_{>1}$ coprimos dos a dos se tiene el isomorfismo

$$(\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z}) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}/m_N\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/M\mathbb{Z} \qquad \text{donde } M = \prod_{j=1}^{N} m_j.$$

Adjunto aquí una prueba constructiva, más o menos tal como aparecerá en los apuntes.

Sabemos que Como M/m_j y m_j son coprimos, existe $u_j \in \mathbb{Z}$ con $u_j(M/m_j) \equiv 1\ (m)$. A partir de estos u_j definimos la función $F : \mathbb{Z}^N \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por

$$F(n_1, \ldots, n_N) = n_1u_1M/m_1 + n_2u_2M/m_2 + \cdots + n_Nu_NM/m_N$$

En los argumentos de F, al sumar a n_j un múltiplo de m_j el resultado cambia por un múltiplo de M, entonces F está bien definida al pasar a las clases. Además la función inducida en las clases es un homomorfismo de anillos: preserva las sumas por ser lineal y también los productos porque M divide a $(M/m_j)(M/m_k)$ para $j \neq k$ y a $(u_jM/m_j)^2 - u_jM/m_j$, ya que m_j divide a $u_jM/m_j - 1$ por la definición de u_j.

El cardinal de ambos anillos es M, por tanto solo comprobar la inyectividad, es decir, que el núcleo es trivial. Si $F(n_1, n_2, \ldots, n_N)$ es múltiplo de M, como $m_j \mid M/m_k$ para $k \neq j$, se deduce $m_j \mid n_ju_jM/m_j$ para cada j, lo que implica $m_j \mid n_j$, porque u_jM/m_j y m_j son coprimos. Por tanto la clase de n_j módulo m_j es cero.