Nota: Con $\lfloor x \rfloor$ se indica la parte entera, es decir, el máximo de $\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$. Por ejemplo, $\lfloor 2.8 \rfloor = 2$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$, $\lfloor -1 \rfloor = -1$, $\lfloor -1.1 \rfloor = -2$.

1) Halla el mayor conjunto de números reales (el dominio) en que se pueden definir, como funciones reales, $f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor - 1/2}$ y $g(x) = \exp(1/\cos x)$.

2) Halla la imagen de las funciones del ejercicio anterior indicando en cada caso su ínfimo.

3) Halla el dominio y la imagen de $f(x) = 1/\log(4x - 4x^2)$.

4) Se dice que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es *par* si $f(x) = f(-x)$ y que es *impar* si $f(x) = -f(-x)$. Estudia si el producto y la composición de funciones pares o impares es par o impar considerando todas las posibilidades.

5) Sean $f(x) = \tan x$ y $g(x) = \operatorname{arc\,sen} x$. Muestra que para $x \in (-1, 1)$ se tiene la igualdad $\big((f \circ g)(x)\big)^2 = x^2/(1 - x^2)$. Comprueba esta relación para algún valor no nulo de x en el que sepas calcular g.

6) Estudia si las siguientes funciones tienen límite cuando $x \to 1$.

$$f_1(x) = \frac{1-x}{|x-1|}, \qquad f_2(x) = \operatorname{sen}\big(\pi \lfloor (x-1)^{-1} \rfloor\big), \qquad f_3(x) = \frac{\log x}{2} \Big\lfloor \frac{4}{\log x} \Big\rfloor.$$

7) Busca dos funciones sencillas tales que no exista su límite cuando $x \to 0$, pero que exista el límite de su suma.

8) Manipulando la función exponencial, busca una función sencilla tal que su límite cuando $x \to +\infty$ sea 2 y cuando $x \to -\infty$ sea -1.

9) Calcula los siguientes límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} e^{x^{-1} \cos x}, \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}{|x-1|}, \qquad \lim_{x \to 1/2^+} \frac{|4x^2 - 4x + 1|}{2x^2 - 3x + 1}.$$

10) En el ejercicio anterior, calcula los límites laterales en la dirección opuesta, es decir, $x \to 0^-$, $x \to 1^-$ y $x \to 1/2^-$.

11) Estudia la continuidad de las funciones $f(x) = \operatorname{sen}\big(\pi x - \pi \lfloor x \rfloor\big)$ y $g(x) = \cos\big(\pi x - \pi \lfloor x \rfloor\big)$.

12) Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\tan\left(\frac{1}{2}\pi \cos(\pi x)\right)} & \text{si } x \notin \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

13) Calcula a y b para que la siguiente función definida a trozos sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 1/\log(x - x^2) & \text{si } x \in (0,1), \\ 1 + a\cos x & \text{si } x \leq 0, \\ b + 1 + be^x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

14) Demuestra que si $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y su imagen está en $[0,1]$, entonces tiene un punto fijo, es decir, existe $x_0 \in [0,1]$ con $f(x_0) = x_0$. Da un contraejemplo para f no continua. Indicación: Considera $g(x) = f(x) - x$ para la primera parte.

15) Demuestra que la ecuación $x - \operatorname{sen} x - 2 = 0$ tiene al menos una solución y halla una aproximación suya con una precisión de al menos una cifra decimal.

16) Encuentra una función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que no sea continua, pero que alcance todos los valores entre $f(0)$ y $f(1)$.

17) Estudia si las siguientes funciones son derivables en $x = 0$ definiendo $f_j(0) = 0$.

$$f_1(x) = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}, \qquad f_2(x) = 3^{-1/|x|}, \qquad f_3(x) = \frac{x \operatorname{sen} x}{|x|}.$$

18) Estudia si $f(x) = x|x| \operatorname{sen} x$ tiene una derivada segunda.

19) Calcula la derivada de $\log \frac{x^2+1}{x^4+1}$ y de $x^{\tan x}$.

20) Halla la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}\left(\pi x^{2x}\right)$ en $x = 1$.

21) Sea $g(x)$ tal que $(s \circ g)(x) = 2x$ con $s(x) = e^x - e^{-x}$. Halla la derivada de g consiguiendo una expresión lo más explícita posible. Indicación: Piensa en la diferencia $(e^t + e^{-t})^2 - (e^t - e^{-t})^2$.

22) Calcula la derivada de $\arctan g(x)$ y de $\operatorname{arc\,sen} g(x)$ donde $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

23) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2^x + 3^x - 5}{x^2 + x - 2}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{(\tan x)^3}{2x^5 + 2x^4 - x^3}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)\operatorname{sen} x}{\big(\log(1+x)\big)^2}.$$

24) Considera los límites

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x}, \qquad L_2 = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}, \qquad L_3 = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}.$$

Se tiene $L_1 = 1$ y $L_2 = 0$ (explica por qué) y por tanto $L_3 = L_1 L_2 = 0$. Sin embargo, al aplicar directamente la regla de L'Hôpital a L_3 se obtiene un límite que no existe. ¿Sabrías resolver esta paradoja? Indicación: Revisa el enunciado preciso de la regla de L'Hôpital.

25) Para la función $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{(x+1)^2}$, halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos y esboza su gráfica.

26) Demuestra que $x^3 - 3x + C = 0$, donde C es una constante, tiene a lo más una solución $x \in [-1, 1]$. Halla los valores de C para los que hay una solución y los valores para los que no hay ninguna.

27) Esboza la gráfica de $f(x) = |x^2 + 2x - 3| + |x + 2|$.

28) Decide cuándo es cóncava y convexa la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 4\cos x$.

29) Haz un esbozo de la gráfica de $f(x) = \exp\left((x^2 - 1)^{-1}\right)$.

30) Demuestra la desigualdad $e^x \geq 1 + x$ para $x \in \mathbb{R}$ y $x^{-1}\log x \leq e^{-1}$ para $x > 0$. En cada caso halla un valor de x para el que se tenga la igualdad.

31) Halla el volumen máximo que puede tener un cono (circular recto) inscrito en una esfera de radio 3. Indicación: Recuerda que el volumen del cono es un tercio del área de la base por la altura.

32) Halla la mínima distancia del punto $(3, 3/2)$ a la parábola $y = 2x^2$.

33) Considera un triángulo equilátero de lado 2 y un rectángulo en su interior de manera que uno de sus lados esté dentro de uno de las lados del triángulo. ¿Cuál es el área máxima del rectángulo?

34) Calcula el polinomio de Taylor de grado 4 de $f(x) = \cos x$ en $x_0 = \pi/4$.

35) Calcula los polinomios de Taylor de grado 2 y 3 de $f(x) = x^3 + x + 1$ en $x_0 = 1$. ¿Qué ocurre si operas el polinomio de grado 3? Da una explicación para ello.

36) Se sabe que la función $f(x) = 4\arctan(3x) + 4\arctan(2x)$ cumple $f(1/6) = \pi$. Halla el polinomio de Taylor en $x_0 = 0$ de menor grado con el que se obtenga una aproximación de π con un error menor que 0.025.