Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

- Solo hay que entregar esta hoja con las respuestas.
- A las 11:00 todos los exámenes deben estar entregados.

1) [3.5 puntos] Decide si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!+2}$ converge.

Sean $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!+2}$ y $b_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Se cumple

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{(2n)!}{(2n)!+2} = \lim \frac{1}{1+2/(2n)!} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

El criterio de comparación asegura que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter. Apliquemos a la segunda serie el criterio del cociente. Para ello, calculamos

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{\big((n+1)!\big)^2(2n)!}{(n!)^2(2n+2)!} = \lim \frac{\big(n!\cdot(n+1)\big)^2(2n)!}{(n!)^2(2n)!\cdot(2n+1)(2n+2)}.$$

Los factoriales se cancelan en la última expresión y resulta

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \lim \frac{n+1}{2(2n+1)} = \lim \frac{1+1/n}{2(2+1/n)} = \frac{1}{4}.$$

Según el criterio del cociente, la serie converge porque es menor que 1.

2) [3.5 puntos] Considera $f(x) = \dfrac{e^{7/x}\cos x - e^{1/x}}{e^{7/x}+1}$. Calcula los límites laterales en cero y estudia si la función definida por $g(x) = \operatorname{sen}\big(\pi f(x)\big)$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$ es continua.

Se tiene $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$ porque $1/x \to -\infty$. Entonces

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{7/x}\cos x - e^{1/x}}{e^{7/x}+1} = \frac{0\cdot 1 - 0}{0+1} = 0.$$

De la misma forma, $\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = 0$ porque $-1/x \to -\infty$ y se tiene, dividiendo por $e^{7/x}$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{7/x}\cos x - e^{1/x}}{e^{7/x}+1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - e^{-6/x}}{1+e^{-7/x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Según lo anterior,

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \operatorname{sen}(\pi\cdot 0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \operatorname{sen}(\pi\cdot 1) = \operatorname{sen}\pi = 0$$

Como ambos coinciden, $\lim_{x\to 0} g(x)$ existe y es nulo. Además, $g(0) = \lim_{x\to 0} g(x)$, por tanto g es continua en $x = 0$. Para el resto de los valores, g es una función elemental bien definida (no hay denominadores que se anulen, la exponencial es siempre positiva) y por tanto es continua en todo $\mathbb{R}$.

3) [1.5 puntos por acierto, -1 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ☐ F. ☐ Si a_n cumple $\lim a_n^2 = 2$ entonces existe $\lim a_n$ y es $\sqrt{2}$ o $-\sqrt{2}$.

V. ☐ F. ☐ El número $2^{2022}\Big(\dfrac{i-2}{1-i}\Big)^{2022} + (i-3)^{2022} + (1+i)^{2023}$ es real.

Falso en ambos casos. En el primero un contraejemplo es $a_n = (-1)^n\sqrt{2}$. No existe $\lim a_n$ pero $\lim a_n^2 = 2$. En el segundo, dividiendo, $(i-2)/(1-i) = (-3-i)/2$, entonces la suma de los dos primeros términos es real (un número complejo más su conjugado). Por otro lado, el último término es $(1+i)^{2023} = \big(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\big)^{2023}$ que no está en $\mathbb{R}$ porque 4 no divide a 2023.

Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

- Solo hay que entregar esta hoja con las respuestas.
- A las 11:00 todos los exámenes deben estar entregados.

1) [3.5 puntos] Considera $f(x) = \dfrac{e^{5/x}\cos x - e^{1/x}}{e^{5/x}+1}$. Calcula los límites laterales en cero y estudia si la función definida por $g(x) = \operatorname{sen}\big(\pi f(x)\big)$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$ es continua.

Se tiene $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$ porque $1/x \to -\infty$. Entonces

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{5/x}\cos x - e^{1/x}}{e^{5/x}+1} = \frac{0\cdot 1 - 0}{0+1} = 0.$$

De la misma forma, $\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = 0$ porque $-1/x \to -\infty$ y se tiene, dividiendo por $e^{5/x}$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{5/x}\cos x - e^{1/x}}{e^{5/x}+1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - e^{-4/x}}{1+e^{-5/x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Según lo anterior,

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \operatorname{sen}(\pi\cdot 0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \operatorname{sen}(\pi\cdot 1) = \operatorname{sen}\pi = 0$$

Como ambos coinciden, $\lim_{x\to 0} g(x)$ existe y es nulo. Además, $g(0) = \lim_{x\to 0} g(x)$, por tanto g es continua en $x = 0$. Para el resto de los valores, g es una función elemental bien definida (no hay denominadores que se anulen, la exponencial es siempre positiva) y por tanto es continua en todo $\mathbb{R}$.

2) [3.5 puntos] Decide si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!+3}$ converge.

Sean $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!+3}$ y $b_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Se cumple

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{(2n)!}{(2n)!+3} = \lim \frac{1}{1+3/(2n)!} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

El criterio de comparación asegura que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter. Apliquemos a la segunda serie el criterio del cociente. Para ello, calculamos

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{\big((n+1)!\big)^2(2n)!}{(n!)^2(2n+2)!} = \lim \frac{\big(n!\cdot(n+1)\big)^2(2n)!}{(n!)^2(2n)!\cdot(2n+1)(2n+2)}.$$

Los factoriales se cancelan en la última expresión y resulta

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \lim \frac{n+1}{2(2n+1)} = \lim \frac{1+1/n}{2(2+1/n)} = \frac{1}{4}.$$

Según el criterio del cociente, la serie converge porque es menor que 1.

3) [1.5 puntos por acierto, -1 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ☐ F. ☐ Si a_n cumple $\lim a_n^2 = 2$ entonces existe $\lim a_n$ y es $\sqrt{2}$ o $-\sqrt{2}$.

V. ☐ F. ☐ El número $2^{2022}\Big(\dfrac{i-2}{1-i}\Big)^{2022} + (i-3)^{2022} + (1+i)^{2023}$ es real.

Falso en ambos casos. En el primero un contraejemplo es $a_n = (-1)^n\sqrt{2}$. No existe $\lim a_n$ pero $\lim a_n^2 = 2$. En el segundo, dividiendo, $(i-2)/(1-i) = (-3-i)/2$, entonces la suma de los dos primeros términos es real (un número complejo más su conjugado). Por otro lado, el último término es $(1+i)^{2023} = \big(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\big)^{2023}$ que no está en $\mathbb{R}$ porque 4 no divide a 2023.

Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

- Solo hay que entregar esta hoja con las respuestas.
- A las 11:00 todos los exámenes deben estar entregados.

1) [3.5 puntos] Decide si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!+5}$ converge.

Sean $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!+5}$ y $b_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Se cumple

$$\text{lím} \frac{a_n}{b_n} = \text{lím} \frac{(2n)!}{(2n)!+5} = \text{lím} \frac{1}{1+5/(2n)!} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

El criterio de comparación asegura que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter. Apliquemos a la segunda serie el criterio del cociente. Para ello, calculamos

$$\text{lím} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \text{lím} \frac{\big((n+1)!\big)^2(2n)!}{(n!)^2(2n+2)!} = \text{lím} \frac{\big(n!\cdot(n+1)\big)^2(2n)!}{(n!)^2(2n)!\cdot(2n+1)(2n+2)}.$$

Los factoriales se cancelan en la última expresión y resulta

$$\text{lím} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \text{lím} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \text{lím} \frac{n+1}{2(2n+1)} = \text{lím} \frac{1+1/n}{2(2+1/n)} = \frac{1}{4}.$$

Según el criterio del cociente, la serie converge porque es menor que 1.

2) [3.5 puntos] Considera $f(x) = \dfrac{e^{3/x}\cos x - e^{1/x}}{e^{3/x}+1}$. Calcula los límites laterales en cero y estudia si la función definida por $g(x) = \operatorname{sen}\big(\pi f(x)\big)$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$ es continua.

Se tiene $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$ porque $1/x \to -\infty$. Entonces

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{3/x}\cos x - e^{1/x}}{e^{3/x}+1} = \frac{0\cdot 1 - 0}{0+1} = 0.$$

De la misma forma, $\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = 0$ porque $-1/x \to -\infty$ y se tiene, dividiendo por $e^{3/x}$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{3/x}\cos x - e^{1/x}}{e^{3/x}+1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - e^{-2/x}}{1+e^{-3/x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Según lo anterior,

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \operatorname{sen}(\pi\cdot 0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \operatorname{sen}(\pi\cdot 1) = \operatorname{sen}\pi = 0$$

Como ambos coinciden, $\lim_{x\to 0} g(x)$ existe y es nulo. Además, $g(0) = \lim_{x\to 0} g(x)$, por tanto g es continua en $x = 0$. Para el resto de los valores, g es una función elemental bien definida (no hay denominadores que se anulen, la exponencial es siempre positiva) y por tanto es continua en todo $\mathbb{R}$.

3) [1.5 puntos por acierto, -1 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ☐ F. ☐ Si a_n cumple $\lim a_n^2 = 2$ entonces existe $\lim a_n$ y es $\sqrt{2}$ o $-\sqrt{2}$.

V. ☐ F. ☐ El número $2^{2022}\Big(\dfrac{i-2}{1-i}\Big)^{2022} + (i-3)^{2022} + (1+i)^{2023}$ es real.

Falso en ambos casos. En el primero un contraejemplo es $a_n = (-1)^n\sqrt{2}$. No existe $\lim a_n$ pero $\lim a_n^2 = 2$. En el segundo, dividiendo, $(i-2)/(1-i) = (-3-i)/2$, entonces la suma de los dos primeros términos es real (un número complejo más su conjugado). Por otro lado, el último término es $(1+i)^{2023} = \big(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\big)^{2023}$ que no está en $\mathbb{R}$ porque 4 no divide a 2023.

Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

- Solo hay que entregar esta hoja con las respuestas.
- A las 11:00 todos los exámenes deben estar entregados.

1) [3.5 puntos] Considera $f(x) = \dfrac{e^{2/x}\cos x - e^{1/x}}{e^{2/x}+1}$. Calcula los límites laterales en cero y estudia si la función definida por $g(x) = \operatorname{sen}\big(\pi f(x)\big)$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$ es continua.

Se tiene $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$ porque $1/x \to -\infty$. Entonces

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2/x}\cos x - e^{1/x}}{e^{2/x}+1} = \frac{0\cdot 1 - 0}{0+1} = 0.$$

De la misma forma, $\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = 0$ porque $-1/x \to -\infty$ y se tiene, dividiendo por $e^{2/x}$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2/x}\cos x - e^{1/x}}{e^{2/x}+1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - e^{-1/x}}{1+e^{-2/x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Según lo anterior,

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \operatorname{sen}(\pi\cdot 0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \operatorname{sen}(\pi\cdot 1) = \operatorname{sen}\pi = 0$$

Como ambos coinciden, $\lim_{x\to 0} g(x)$ existe y es nulo. Además, $g(0) = \lim_{x\to 0} g(x)$, por tanto g es continua en $x = 0$. Para el resto de los valores, g es una función elemental bien definida (no hay denominadores que se anulen, la exponencial es siempre positiva) y por tanto es continua en todo $\mathbb{R}$.

2) [3.5 puntos] Decide si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!+7}$ converge.

Sean $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!+7}$ y $b_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Se cumple

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{(2n)!}{(2n)!+7} = \lim \frac{1}{1+7/(2n)!} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

El criterio de comparación asegura que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter. Apliquemos a la segunda serie el criterio del cociente. Para ello, calculamos

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{\big((n+1)!\big)^2(2n)!}{(n!)^2(2n+2)!} = \lim \frac{\big(n!\cdot(n+1)\big)^2(2n)!}{(n!)^2(2n)!\cdot(2n+1)(2n+2)}.$$

Los factoriales se cancelan en la última expresión y resulta

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \lim \frac{n+1}{2(2n+1)} = \lim \frac{1+1/n}{2(2+1/n)} = \frac{1}{4}.$$

Según el criterio del cociente, la serie converge porque es menor que 1.

3) [1.5 puntos por acierto, -1 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ☐ F. ☐ Si a_n cumple $\lim a_n^2 = 2$ entonces existe $\lim a_n$ y es $\sqrt{2}$ o $-\sqrt{2}$.

V. ☐ F. ☐ El número $2^{2022}\Big(\dfrac{i-2}{1-i}\Big)^{2022} + (i-3)^{2022} + (1+i)^{2023}$ es real.

Falso en ambos casos. En el primero un contraejemplo es $a_n = (-1)^n\sqrt{2}$. No existe $\lim a_n$ pero $\lim a_n^2 = 2$. En el segundo, dividiendo, $(i-2)/(1-i) = (-3-i)/2$, entonces la suma de los dos primeros términos es real (un número complejo más su conjugado). Por otro lado, el último término es $(1+i)^{2023} = \big(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\big)^{2023}$ que no está en $\mathbb{R}$ porque 4 no divide a 2023.