1. Un teorema antiguo

El siguiente resultado se pierde en la noche de los tiempos.

Teorema 1.1. *Existen infinitas soluciones* $x, y \in \mathbb{Z}^+$ *de* $x^2 - 2y^2 = 1$.

Lema 1.2. *Sean* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ *y* $N(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$, *entonces para* $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ *se cumple* $N(z_1)N(z_2) = N(z_1 z_2)$.

Demostración. Se deja como ejercicio. △

Prueba del Teorema 1.1. Sean A_n y B_n, con $n \in \mathbb{Z}^+$, los enteros positivos definidos mediante $A_n + B_n\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n$. Por el Lema 1.2 se tiene

$$A_n^2 - 2B_n^2 = N(A_n + B_n\sqrt{2}) = \big(N(3 + 2\sqrt{2})\big)^n$$

y esta cantidad es $\big(3^2 - 2 \cdot 2^2\big)^n = 1$. △

Se puede demostrar que A_n y B_n dan todas las soluciones positivas.

2. Un teorema moderno

Solo es moderno saber que es un *teorema* en vez de una *conjetura*.

Teorema 2.1. *Para* $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ *y* $n \in \mathbb{Z}_{>2}$ *se tiene* $x^n + y^n \neq z^n$.

Sin embargo, hay infinitas soluciones no proporcionales para $n = 2$ como

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \qquad 5^2 + 12^2 = 13^2, \qquad 8^2 + 15^2 = 17^2.$$

Para la prueba del Teorema 2.1 pregunta a Wiles.

3. Un teorema prestado

Ciertos resultados de Ramanujan me condujeron a un curioso producto infinito que no veo en su obra.

Teorema 3.1. *Se cumple*

$$\prod_{n \text{ impar}} \tanh\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[8]{2}}.$$

Prueba (Esquema). Fórmula del triple producto de Jacobi para la función $\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z}$ y valores especiales de $\theta(i + 1)$ y $\theta(i)$. △

¿Hay alguna prueba del Teorema 3.1 que sea “sencilla” y que no requiera saber nada de la teoría de funciones elípticas y modulares?