Hoja 5

1) Calcula los autovalores y autovectores de

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

2) Halla a para que la matriz

$$\begin{pmatrix} -2 & a & 7 \\ -3 & 3a+1 & 5 \\ -4 & a & 9 \end{pmatrix}$$

tenga $\lambda = 1$ como autovalor. Para ese valor de a halla todos los autovectores.

3) Halla $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $C^{-1}AC$ sea diagonal, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Considera una matriz $A \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{R})$ definida por bloques

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \qquad \text{donde} \quad A_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad A_2 \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$$

y O representa matrices nulas de manera que lo anterior tenga sentido. ¿Qué relación hay entre los autovalores y autovectores de A y los de las A_i?

5) Halla bases ortogonales en las que la siguientes matrices simétricas diagonalicen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6) Halla la forma diagonal de las siguientes matrices unitarias:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & -1-i \\ 1-i & 1-i \end{pmatrix}.$$

Para la primera da además una base ortonormal en la que se alcance.

7) Supongamos que un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ (con el producto escalar usual) tiene una matriz simétrica en la base canónica. ¿Será también simétrica en cualquier base ortonormal?

8) Sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ con $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ y $A = I_n - \vec{v}\vec{v}^t$, considerando $\vec{v}$ como matriz columna. Explica por qué A es simétrica. Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ el subespacio generado por $\vec{v}$. Muestra que todos los vectores de $V - \{\vec{0}\}$ y de $V^{\perp} - \{\vec{0}\}$ son autovectores de A. ¿Cuál es su forma diagonal?

9) Sea
$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1-\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$
Calcula A^{2020} de manera totalmente explícita, sin dejar nada indicado. Posiblemente necesitarás $\big((i\sqrt{3}-1)/2\big)^{2020} = \big(e^{2\pi i/3}\big)^{2020} = e^{2\pi i/3} = (i\sqrt{3}-1)/2$. ¿Sabes justificar estas igualdades?

10) Halla una fórmula para la sucesión de vectores $\{\vec{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ que satisface
$$\vec{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{x}_n \qquad \text{con} \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

11) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:
$$\begin{cases} x' = -3x - 4y, \\ y' = 2x + 3y, \\ x(0) = 1, \ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} x' = 3x - 6y, \\ y' = 2x - 4y, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

12) Para cada una de las siguientes matrices, encuentra una base en la que alcancen la forma canónica de Jordan:
$$\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & -1+i \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

13) Halla todos los valores $a, b \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ no sea diagonalizable sobre $\mathbb{C}$:
$$\begin{pmatrix} (b+1)a & ab \\ 2-(b+2)a & 2-(b+1)a \end{pmatrix}.$$

14) Calcula la forma canónica de Jordan J de
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
y una matriz C tal que $C^{-1}AC = J$.

15) Halla una base en la que se alcance la forma canónica de Jordan de
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$