La utilidad de este tipo de resultados es que a veces uno tiene la solución exacta para cierto problema de autovalores y autovectores y quiere resolver otro numéricamente parecido. En física se emplea sobre todo en el caso de dimensión infinita.

5.3. Algunas aplicaciones

Como se mencionó al principio del capítulo, un motivo para diagonalizar un endomorfismo o una matriz es simplificar los cálculos que parecen en ciertas aplicaciones. Aquí veremos dos de ellas, desde un punto de vista teórico, que guardan relación con temas que forman parte de los planes de estudios de ingeniería.

Muchos algoritmos están basados en la repetición: la salida del algoritmo, o parte de ella, se toma como nueva entrada cierto número de veces. Si tal algoritmo viene dado por una aplicación lineal $K^n \longrightarrow K^n$, la pregunta natural es determinar la sucesión de vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$ definidos mediante

$$\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k \qquad \text{con} \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{5.5}$$

donde $A \in \mathcal{M}_n(K)$ y $\vec{x}_0 \in K^n$ están fijados.

En principio, esto es muy fácil: $\vec{x}_1 = A\vec{x}_0$, $\vec{x}_2 = A\vec{x}_1 = A^2\vec{x}_0$ y, en general, $\vec{x}_k = A^k\vec{x}_0$. Esta fórmula es exacta pero demasiado teórica. No nos da intuición acerca del comportamiento a la larga de la sucesión, lo cual es a menudo fundamental para decidir la eficiencia del algoritmo. Deseamos una fórmula más explícita, a través de un cálculo sencillo de A^k, y ahí es donde entra la diagonalización.

Proposición 5.3.1. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ diagonalizable. Si $C \in \mathcal{M}_n(K)$ tiene por columnas una base de vectores propios y D es la matriz diagonal compuesta por los valores propios respectivos, $A^k = CD^kC^{-1}$. En particular, la solución de* (5.5) *es $\vec{x}_k = CD^kC^{-1}\vec{x}_0$.*

El punto importante a observar es que el cálculo de D^k es sencillo, pues se reduce a elevar a k cada elemento de la diagonal.

La prueba del resultado es poco más que repetir nuestras conclusiones sobre diagonalización.

Demostración. Sabíamos $C^{-1}AC = D$ por (5.2) y, por tanto, $A = CDC^{-1}$. De aquí, $A^2 = CDC^{-1}CDC^{-1} = CD^2C^{-1}$, $A^3 = A^2A = CD^2C^{-1}CDC^{-1} = CD^3C^{-1}$ y así sucesivamente. $\square$

Comencemos con un ejemplo en el que sería fácil deducir el resultado experimentalmente. Queremos resolver (5.5) para

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 6 \\ -20 & 11 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2 \text{ arbitrario.}$$

El polinomio característico es $(\lambda^2-121)+120=\lambda^2-1$, por tanto tenemos dos valores propios $\lambda_1=-1$ y $\lambda_2=1$. Vectores propios respectivos son $\vec{v}_1=(3,5)^t$ y $\vec{v}_2=(1,2)^t$. Escribiendo $\vec{x}_0=(a,b)^t$, de acuerdo con el resultado anterior,

$$\vec{x}_k=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^k&0\\0&1^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(6(-1)^k-5)a+3\big(1-(-1)^k\big)b\\10\big((-1)^k-1\big)a+\big(6-5(-1)^k\big)b\end{pmatrix}$$

donde para la última igualdad se han operado las matrices. Más sencillo es darse cuenta de que $D^2=I$, porque los autovalores son ±1. Por tanto $D^k=D$, y equivalentemente $A^k=A$, para k impar mientras que $D^k=I$, y $A^k=I$, para k par. Por consiguiente,

$$\vec{x}_k=A\vec{x}_0=\begin{pmatrix}-11a+6b\\-20a+11b\end{pmatrix}\quad\text{si } k \text{ es impar}\qquad\text{y}\qquad \vec{x}_k=x_0\quad\text{si } k \text{ es par.}$$

Esto es lo mismo que la fórmula anterior pero escrito de forma menos aparatosa.

El siguiente ejemplo que sería más difícil de resolver experimentalmente:

$$\begin{cases}x_{k+1}=8x_k+6y_k\\y_{k+1}=-3x_k-y_k\end{cases}\qquad\text{con}\quad x_0=y_0=1.$$

En forma matricial, escribiendo $\vec{x}_k=(x_k,y_k)^t$,

$$\vec{x}_{k+1}=A\vec{x}_k\qquad\text{con}\qquad A=\begin{pmatrix}8&6\\-3&-1\end{pmatrix}\ \text{y}\ \vec{x}_0=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es $|A-\lambda I|=\lambda^2-7\lambda+10$, por tanto los valores propios resultan $\lambda_1=2$, $\lambda_2=5$. Para calcular vectores propios respectivos, debemos hallar soluciones de los sistemas

$$(A-\lambda_1 I)\vec{x}=\begin{pmatrix}6&6\\-3&-3\end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0}\qquad\text{y}\qquad(A-\lambda_2 I)\vec{x}=\begin{pmatrix}3&6\\-3&-6\end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0}.$$

Elecciones naturales son $\vec{v}_1=(-1,1)^t$ y $\vec{v}_2=(-1,1)^t$, con lo que la sucesión $\vec{x}_k$ responde a la fórmula

$$\vec{x}_k=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^k&0\\0&5^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Operando, se tiene

$$\vec{x}_k=\begin{pmatrix}2\cdot5^k-2^k&2\cdot5^k-2^{k+1}\\-5^k+2^k&-5^k+2^{k+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot5^k-3\cdot2^k\\-2\cdot5^k+3\cdot2^k\end{pmatrix}.$$

Es decir, $x_k=4\cdot5^k-3\cdot2^k$, $y_k=-2\cdot5^k+3\cdot2^k$. Cambiando $(1,1)^t$ por un vector genérico, se tendría la solución para cualquier valor inicial.

Hallemos ahora una fórmula general para el vector $\vec{x}_k$ determinado por (5.5) con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz está medio diagonalizada lo que hace que sea sencillo calcular el polinomio característico $(\lambda^2 - 5\lambda + 6)(5 - \lambda)$. Con ello, los valores propios son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 5$. Son distintos y entonces A es diagonalizable. Algunos cálculos llevan a que vectores propios correspondientes a estos valores propios son $\vec{v}_1 = (2, 1, 0)^t$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)^t$ y $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)^t$. La Proposición 5.3.1 implica

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 5^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} - 3^k \\ 2^k - 3^k \\ -5^k \end{pmatrix}.$$

A modo de comprobación, para $k = 0$ está claro que obtenemos $\vec{x}_0$ y para $k = 1$ el resultado coincide con $A\vec{x}_0$.

Como último ejemplo vamos a buscar una fórmula para los *números de Fibonacci*[5] definidos por la recurrencia

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \qquad \text{con} \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1.$$

Es decir, partiendo de 0 y 1 cada número de Fibonacci se obtiene sumando los dos anteriores. Los primeros son 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... y no es difícil sospechar un crecimiento exponencial. En principio, parece que la ecuación que los define escapa de las posibilidades de la Proposición 5.3.1 porque no está en forma matricial, pero hay un método para conseguirlo que es fácil de generalizar. Escribimos la relación anterior como

$$\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{x}_k = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}.$$

La segunda ecuación es tautológica, dice que $F_{k+1} = F_{k+1}$, es solo un artificio para introducir una matriz cuadrada a la que aplicar la Proposición 5.3.1.

Los autovalores de A son $\lambda_\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2$ y dos autovectores respectivos son $(\lambda_\pm, 1)^t$. Entonces se tiene

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} \lambda_+ & \lambda_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_+^k & 0 \\ 0 & \lambda_-^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_+ & \lambda_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

[5] El nombre deriva de que fueron introducidos, en los albores del siglo XIII, por Leonardo de Pisa apodado Fibonacci. Hoy en día tienen cierta presencia en la cultura popular por su aparición en diferentes novelas y películas.

porque $\vec{x}_0 = (F_1, F_0)^t = (1,0)^t$. Operar esto da un poco de pereza pero si lo hacemos y nos fijamos en la segunda coordenada de $\vec{x}_k$ obtendremos una flamante fórmula explícita para los números de Fibonacci, llamada *fórmula de Binet*:

$$F_k = \frac{\lambda_+^k - \lambda_-^k}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^k - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^k\Big).$$

Como $-1 < \lambda_- < 0$, para k grande λ_-^k es despreciable y $F_k \approx \lambda_+^k/\sqrt{5}$. Por ejemplo,

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{20} = 6765.000029\ldots \qquad y \qquad F_{20} = 6765.$$

La segunda aplicación que estudiaremos es relativa a la solución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales. Es decir, ecuaciones del tipo:

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t), \qquad \text{con} \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \tag{5.6}$$

donde A es una matriz cuadrada constante, $\vec{x}(t)$ es una función vectorial dependiendo de una variable real t y $\vec{x}\,'(t)$ es su derivada. La mayor parte de las veces $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, pero la teoría sirve igualmente para el caso complejo.

En los cursos de matemáticas se prueba que (5.6) tiene solución única aunque no nos preocuparemos por ello aquí.

Proposición 5.3.2. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es diagonalizable, $\vec{x}(t) = C\exp(Dt)C^{-1}\vec{x}_0$ es solución de* (5.6)*, donde se ha usado la notación de la Proposición 5.3.1 y* $\exp(Dt)$ *es la matriz diagonal obtenida al reemplazar d_{ii} en D por $e^{d_{ii}t}$.*

Definiendo[6] $\exp(At) = C\exp(Dt)C^{-1}$, la solución es $\vec{x}(t) = \exp(At)\vec{x}_0$ y esta fórmula es bastante sugestiva porque formalmente verifica (5.6) si no se tienen escrúpulos sobre derivar matrices.

Demostración. Sea $\vec{y} = C^{-1}\vec{x}$, entonces la ecuación $\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t)$ se escribe como $(C\vec{y})'(t) = AC\vec{y}(t)$. La constantes son irrelevantes al derivar, por tanto también equivale a $C\vec{y}\,'(t) = AC\vec{y}(t)$. Recordando (5.2), $\vec{y}\,'(t) = D\vec{y}(t)$, lo cual se desacopla en n ecuaciones diferenciales en una dimensión:

$$y_i'(t) = d_{ii}y_i(t) \qquad \text{con} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Cada una de ellas tiene solución $y_i(t) = c_i e^{d_{ii}t}$ con c_i una constante arbitraria, así que $\vec{y}(t) = \exp(Dt)\vec{c}$ con $\vec{c}$ un vector constante arbitrario y hemos probado que $\vec{x}(t) = C\vec{y} = C\exp(At)\vec{c}$ resuelve $\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t)$. Para que se cumpla la condición $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ basta tomar $\vec{c} = C^{-1}\vec{x}_0$. □

[6] En realidad lo habitual es definir $\exp(At)$ como la serie infinita $\sum_{n=0}^{\infty} A^n t^n/n!$ que da la solución tanto si A es diagonalizable como si no. Esto permite establecer una conexión, que no analizaremos, entre las dos aplicaciones vistas aquí, pudiéndose deducir ambas de que A^n tenga una fórmula sencilla en una base adecuada.

Supongamos que queremos resolver

$$\vec{x}' = A\vec{x} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica es $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ y produce los valores propios $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$. Como $\{(2,1)^t, (5,3)^t\}$ es una base de vectores propios correspondiente, la Proposición 5.3.2 conduce a la solución,

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} + 5e^t \\ e^{2t} + 3e^t \end{pmatrix}.$$

Muchas veces estas ecuaciones diferenciales no se presentan en forma vectorial. Por ejemplo, un enunciado podría ser resolver

$$\begin{cases} x' = -11x + 6y, \\ y' = -20x + 11y, \end{cases} \qquad \text{con} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

Con la notación anterior, esto es es $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ donde $\vec{x} = (x,y)^t$, $\vec{x}_0 = (1,1)^t$ y A es la matriz del primer ejemplo de solución de (5.5). Tomando de ese ejemplo los autovalores y autovectores, se tiene

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{-t} - 2e^t \\ 5e^{-t} - 4e^t \end{pmatrix}.$$

A modo de comprobación, verifiquemos la primera ecuación del enunciado. Se tiene $x'(t) = -3e^{-t} - 2e^t$ y esto coincide con $-11(3e^{-t} - 2e^t) + 6(5e^{-t} - 4e^t)$.

Si ahora aprovechamos el cálculo de los autovalores y autovectores del siguiente ejemplo que habíamos visto para sucesiones, tendremos que la solución de

$$\vec{x}' = A\vec{x} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

viene dada por

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{5x} - e^{2x} \\ -2e^{5x} + e^{2x} \end{pmatrix}.$$

En analogía con el estudio anterior de los números de Fibonacci y dentro de las ecuaciones básicas que maneja un ingeniero o un físico, consideremos la siguiente ecuación de un *oscilador armónico*:

$$y''(t) + 4y(t) = 0 \qquad \text{con} \quad y(0) = 3,\ y'(0) = 2.$$

El truco para convertir esta ecuación diferencial en vectorial y así estar en disposición de aplicar la Proposición 5.3.2, es similar al empleado con la recurrencia que definía los números de Fibonacci. Tomamos $\vec{x}(t) = \big(y'(t), y(t)\big)^t$ y entonces la ecuación equivale a

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

De nuevo la segunda ecuación no aporta información, simplemente indica $y' = y'$, es un artificio para completar la forma matricial. La ecuación característica es $\lambda^2+4=0$ y debemos ir a $\mathbb{C}$ para resolverla. Los valores propios son $\lambda_1 = -2i$ y $\lambda_2 = 2i$. Una base de autovalores respectivos es $\big\{(-2i,1)^t, (2i,1)^t\big\}$ con lo que tenemos

$$\begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2it} & 0 \\ 0 & e^{2it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Solo estamos interesados en la segunda coordenada, que nos da $y(t)$. Si nos tomamos el trabajo de operar, resulta

$$y(t) = \frac{3+i}{2} e^{-2it} + \frac{3-i}{2} e^{2it} = 3\cos(2t) + \operatorname{sen}(2t),$$

donde para la segunda igualdad se ha sustituido $e^{\pm 2it} = \cos(2t) \pm i \operatorname{sen}(2t)$.

A primera vista, parece un milagro que los números complejos se simplifiquen y el resultado sea real. La explicación analítica es la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales reales mientras que la explicación algebraica es la invariancia por la conjugación. Si A es una matriz real, al conjugar un par autovalor y autovector, se obtiene otro par válido. De ahí que $C\exp(Dt)C^{-1}$ no cambie al conjugar, ni por tanto la solución de $\vec{x}(t)$ de (5.6).

Un último apunte es que seguro que has aprendido o aprenderás un método rápido para resolver ecuaciones diferenciales de la forma $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$, que incluyen el oscilador armónico. El propósito del cálculo anterior es más ilustrar la generalidad que la eficiencia.

Exprimiendo el silicio [opcional]. En `matlab/octave`, dada una matriz cuadrada `A`, su exponencial se calcula con `expm(A)` que corresponde a $C\exp(D)C^{-1}$ con la notación de la Proposición 5.3.2. La `m` es de *matrix* porque `exp(A)` calcula la exponencial de los elementos por separado (desconozco qué utilidad puede tener esto). Un razonamiento sencillo, aunque no inmediato, muestra que $C\exp(Dt)C^{-1}$ coincide con `expm(A*t)`. El siguiente código evalúa `expm(A*t)x0` para muchos valores de `t` en un intervalo o equivalentemente la solución en esos valores del sistema correspondiente de ecuaciones diferenciales. Con ellos se dibuja una aproximación de las gráficas de las componentes de la solución.

Tal como está, la matriz es la del segundo ejemplo de la segunda parte de la sección y por tanto las gráficas aproximan a las de las funciones $f_1(t) = 3e^{-t} - 2e^t$ y $f_2(t) = 5e^{-t} - 4e^t$.

```
% Matriz del sistema
A = [-11,6; -20,11]

% Vector inicial
x0 = [1; 1]

% Intervalo
inter = linspace(0,1,300);

sol = [];
for t = inter
        sol = [sol, expm(A*t)*x0];
end

% Dibuja las componentes de la solución
plot(inter,sol')
```

La definición de `inter` significa que estamos en el intervalo $[0,1]$ tomando 300 puntos intermedios. El bucle en cada paso añade a `sol` la columna correspondiente a la solución en `t`. El comando `plot` dibuja el resultado. En él aparece `sol'` en lugar de `sol` porque este comando dibuja las columnas como gráficas separadas.

Con `sagemath` la exponencial de una matriz `A` se calcula mediante `exp(A)`.

5.4. La forma canónica de Jordan

Nos planteamos ahora qué hacer con los endomorfismos que no son diagonalizables. La respuesta es que casi se diagonalizan y su forma casi diagonal todavía sirve de algo en aplicaciones como las vistas antes, aunque no entraremos en este último punto. La teoría general es complicada y de limitado interés para un ingeniero. Por ello nos restringiremos a los casos de dimensión 2 y 3. Como antes, para que las cosas sean más tangibles, consideraremos matrices en vez de endomorfismos. Toda la sección radica en los dos siguientes resultados y el algoritmo (Proposición 5.4.3) para hallar las bases a las que se refieren:

Teorema 5.4.1. *Dada $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ siempre existe una base de $\mathbb{C}^2$ en la que adquiere una y solo una de las siguientes formas:*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \textit{o bien} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

El primer caso es el diagonalizable que ya conocíamos, lo que aporta de nuevo el resultado es que las no diagonalizables lo son salvo por un 1 fuera de la diagonal.

Teorema 5.4.2. *Dada $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ siempre existe una base de $\mathbb{C}^3$ en la que adquiere una y solo una de las siguientes formas:*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad \textit{o bien} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \textit{o bien} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

De nuevo el primer caso es el diagonalizable y la novedad es que, si no lo es, basta añadir uno o dos unos fuera de la diagonal en ciertas posiciones.