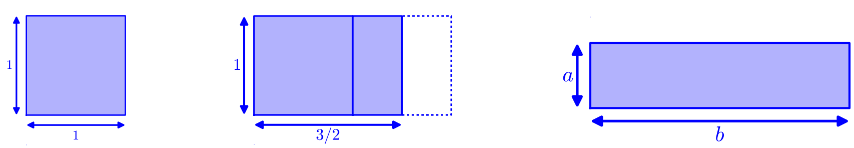
```
N = 20
# Datos de la primera gráfica
L1 = [(k,log_b(2/3*k^3,10)) for k in srange(1,N+1)]
# Datos de la segunda gráfica
L2 = [(k,log_b(factorial(k),10)) for k in srange(1,N+1)]
show( two_graphs(L1,L2) )
```

3.2. Significado geométrico

Los determinantes, salvo el signo, son la fórmula para el área de los *paralelogramos* si $n = 2$, el volumen de los *paralelepípedos* si $n = 3$ y la generalización del volumen de *paralelotopos* en dimensiones mayores. Más de uno dirá, si era una cosa tan simple ¿por qué no hemos empezado por ahí? Porque definir el volumen no es algo tan sencillo, incluso en dimensiones bajas. Es mejor definir el determinante y llamar área, volumen o volumen generalizado a lo que sale.

Para hallar áreas, igual que para medir longitudes, necesitamos fijar unidades. Así decimos que en $\mathbb{R}^2$ el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ determinado por la base canónica $\vec{e}_1 = (1,0)^t$, $\vec{e}_2 = (0,1)^t$ tiene área 1. Más allá de las dificultades inherentes a una definición rigurosa, todos tenemos la idea de que si una figura se divide en trozos el área no varía bajo transformaciones que preservan ángulos y distancias, las cuales corresponden a que dos modelos recortados en papel de la figura original y de la transformada se puedan superponer exactamente. En la jerga se dice que son *congruentes*.

Por ejemplo, el rectángulo determinado por los vectores $(3/2,0)^t$ y $(1,0)^t$ tiene área $3/2$ porque duplicando el trozo $[1,3/2] \times [0,1]$ se obtiene $[1,2] \times [0,1]$ que es congruente a $[0,1] \times [0,1]$.

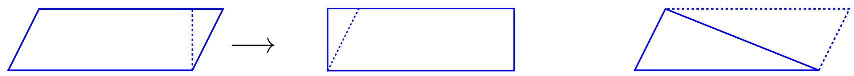


Área 1 Área 3/2 Área b · a

Pensándolo con un poco de cuidado el razonamiento se generaliza para concluir que el área de un rectángulo de lados racionales es base $\times$ altura, lo cual es también cierto en el caso de lados reales porque estos son una suerte de ficción matemática[3] para que las fórmulas con números racionales se extiendan por continuidad.

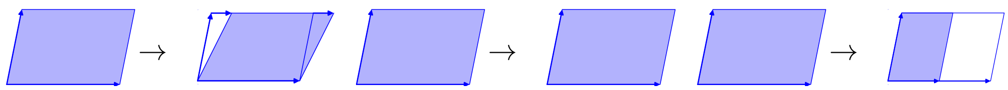
Una vez que conocemos el área del rectángulo se sigue que la de cualquier *paralelogramo* (cuadrilátero de lados opuesto paralelos e iguales) también responde a la fórmula base $\times$ altura porque se puede recordar un pico y pegarlo en el lugar opuesto para obtener un rectángulo. Con dos triángulos congruentes formamos un paralelogramo, por tanto el área del triángulo es $\frac{1}{2}$base $\times$ altura.

[3]Si quieres ver a un matemático famoso defendiendo a voz en grito en una conferencia para público general que los números reales no son "reales" sino ficticios, aquí tienes la oportunidad: `https://www.youtube.com/watch?v=gLTP62tW9Dc`.



Área = base × altura   Área = $\frac{1}{2}$ base × altura

Consideremos ahora los paralelogramos con un vértice en el origen en términos de los vectores que determinan los lados que parten de allí. Si a uno de ellos le añadimos un múltiplo del otro, que tomamos como base, el área no varía porque la altura no lo hace. Evidentemente, no ya el área sino el propio paralelogramo queda invariante si se intercambian los vectores. Finalmente, es obvio a partir de la fórmula que al multiplicar la base por $\lambda > 0$ el área de multiplica por λ.



Transformación elemental 1   Transformación elemental 2   Transformación elemental 3

Todo esto se traduce en que el área se comporta exactamente igual que el determinante bajo las transformaciones elementales salvo que no aparecen signos negativos al intercambiar vectores o multiplicar por un número negativo (multiplicar un vector por $\lambda < 0$ es lo mismo que multiplicarlo por $-\lambda$ y cambiarlo de sentido). La conclusión es que, si nos olvidamos del signo, el cálculo del determinante por reducción de Gauss-Jordan coincide con el cálculo usando las figuras anteriores hasta llegar al cuadrado unidad generado por $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$.

En resumidas cuentas, si $\mathcal{P}_2$ es el paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\text{Área}(\mathcal{P}_2) = \big|\det(\vec{u}|\vec{v})\big|, \qquad \vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \tag{3.5}$$

donde las barras exteriores indican el *valor absoluto*, el resultado con signo positivo. Con el razonamiento anterior las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ deberían escribirse en principio en fila, porque la eliminación de Gauss actúa sobre ellas, pero eso es indiferente por la Proposición 3.1.5.

Si antes de saber nada sobre vectores nos pidieran el área de un triángulo T con un vértice en el origen y los otros dos en los puntos $(3,7)$ y $(5,1)$ pasaríamos un mal rato tratando de usar el teorema de Pitágoras y trigonometría. Ahora que sabemos que un triángulo es la mitad de un paralelogramo y que se cumple (3.5), deducimos en un periquete

$$\text{Área}(T) = \frac{1}{2}\cdot 32 = 16 \qquad \text{porque} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -32.$$

El análogo en tres dimensiones del paralelogramo es el *paralelepípedo* (hexaedro con caras opuestas que son paralelogramos paralelos iguales). Con algo más de complicaciones geométricas llegaríamos a que su volumen, fijado el de $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ como unitario, es el área de la base por la altura y que si $\mathcal{P}_3$ es el paralelepípedo con un vértice en el origen y aristas concurrentes allí determinadas por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, se tiene

$$\text{Volumen}(\mathcal{P}_3) = \big|\det(\vec{u}|\vec{v}|\vec{w})\big|, \qquad \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^3. \tag{3.6}$$

Por ejemplo, los vectores $\vec{u} = (2,2,1)^t$, $\vec{v} = (2,-1,-2)^t$ y $\vec{w} = (1,-2,2)^t$, determinan un paralelepípedo de volumen

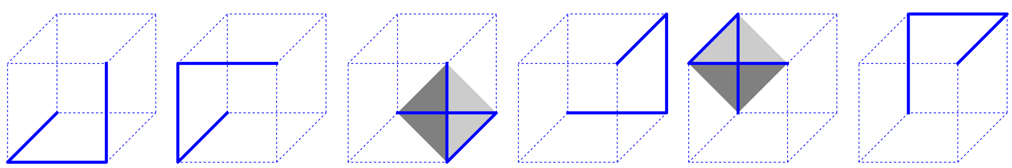
$$\left|\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}\right| = \left| 2\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\right| = |-27| = 27.$$

Aunque sea un ejercicio de visualización imposible, en realidad este paralelepípedo es un cubo de lado 3, por ello el volumen ha resultado $3^3 = 27$.

El análogo del triángulo en tres dimensiones es el *tetraedro*, una pirámide de cuatro caras todas ellas triangulares. Su volumen, en términos de los vectores que dan las aristas que salen de un vértice considerado el origen, es un sexto del anterior:

$$\text{Volumen}(\mathcal{T}) = \frac{1}{6}\big|\det(\vec{u}|\vec{v}|\vec{w})\big|, \qquad \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^3. \tag{3.7}$$

Para demostrarlo, con la ayuda de las transformaciones elementales es suficiente mostrar que un cubo se descompone en seis tetraedros del mismo volumen[4]. Este es un buen reto para nuestra visión en tres dimensiones. Si buscas la descomposición en la bibliografía o en internet notarás que no es tan fácil hacerse a la idea. Aquí va un intento un poco original. Se han marcado con mayor grosor tres aristas de cada una de los tetraedros. En el tercer y quinto casos se señalan también las caras visibles del tetraedro. ¿Te crees que los seis tetraedros son iguales salvo giros y simetrías y por tanto tienen el mismo volumen?



Las tres aristas forman todos los caminos de un vértice al opuesto utilizando solo una vez cada una de las tres direcciones de los ejes. Esto ayuda a inferir que la fórmula para el caso n-dimensional, signifique lo que signifique, es el determinante sin signo dividido por $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, lo que cuadrada con los dos casos que conocemos porque $2! = 2$ y $3! = 6$. Se suele llamar *símplex* o *símplice* al análogo n-dimensional del tetraedro.

Volviendo a nuestro mundo tridimensional, se puede probar que el tetraedro regular de arista $a = 1$ en cierta posición tiene como vértices:

$$(0,0,0), \qquad \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

[4] Los problemas de cortar y reordenar parecen infantiles pero hay algunos bastante complicados. D. Hilbert incluyó en una influyente lista de problemas no resueltos en 1900 la pregunta de si dados dos poliedros del mismo volumen siempre era posible cortar en trozos el primero para obtener el segundo. En el caso de polígonos esto es cierto pero, de acuerdo con lo que conjeturaba de Hilbert, la respuesta es negativa para poliedros.

El volumen del tetraedro regular de arista a vendrá dado según (3.7) por

$$\pm a^3\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{6}\sqrt{3} & \frac{1}{6}\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{6} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

donde se ha elegido el signo de manera que el resultado sea positivo.

Consideremos una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $n = 2, 3$ dada por $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, en la base canónica. Si $A = (\vec{u}|\vec{v})$ para $n = 2$ entonces f aplica el cuadrado unidad, determinado por $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$, en el paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Lo análogo se cumple para $n = 3$ con el paralelepípedo determinado por las columnas de la matriz. En estas situaciones, (3.5) y (3.6) nos dicen que el determinante de la matriz de un endomorfismo (siempre en la base canónica) es, salvo el signo, el factor por el que multiplica las áreas. Intuitivamente cualquier figura está compuesta por copias a escala infinitesimal del cuadrado o el cubo unidad, por tanto tal interpretación es independiente de la figura de partida. Con ello la segunda parte de la Proposición 3.1.5 se vuelve intuitiva porque cuando se aplican dos escalas sucesivamente, los factores se multiplican.

Por ejemplo, consideremos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{de donde} \begin{cases} x = (x' - y')/2, \\ y = (5y' - 3x')/2. \end{cases}$$

Por si no está claro, los coeficientes de x' e y' en las últimas fórmulas coinciden con los elementos de A^{-1}. Sabemos que $x^2+y^2 \le 1$ tiene área π, por eso del πr^2. Mediante la aplicación lineal $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ este círculo se transforma en $(x'-y')^2+(5y'-3x')^2 \le 4$ que geométricamente es un elipse torcida. Si en clase de análisis nos piden que hallemos su área, lo mismo nos da un soponcio integral mientras que teniendo en cuenta que el determinante representa el factor de deformación de las áreas, todo se reduce al cálculo trivial $\pi\big|\det(A)\big| = 2\pi$.

Un caso más sencillo desde todos los puntos de vista es la elipse de semiejes a y b en su posición habitual: $x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1$. Geométricamente, podríamos decir que es el círculo de radio a con un cambio de escala vertical de razón b/a, porque una elipse es un círculo achatado, por tanto su área se debe modificar en esa proporción resultando $\pi a^2 \cdot b/a = \pi ab$. La misma fórmula es asequible utilizando lo que sabemos de integrales del curso de análisis, aunque no lo veremos aquí. Finalmente, desde el punto de vista del álgebra lineal tenemos

$$E = f(C) \qquad \text{con} \quad f(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

donde E es la elipse $x^2/a^2+y^2/b^2 \le 1$ y C el círculo unidad $x^2+y^2 \le 1$. Simplemente mutliplicamos en cada uno de los ejes el radio uno de C por a y por b para obtener los semiejes de E. De nuevo se obtiene la fórmula esperada $\pi\det(A) = \pi ab$.

Exprimiendo el silicio [opcional]. En dos dimensiones, una vez que uno sabe el área del triángulo tiene la posibilidad de hallar el área de cualquier polígono dividiéndolo en triángulos.

En tres dimensiones el análogo sería la división de un poliedro en tetraedros. El siguiente código `sagemath` lleva a cabo este proceso para hallar el volumen de cualquier pirámide partiendo de una lista `L` de vértices en el mismo plano, definidos en la línea 2, que determinan la base y un vértice "superior" `V`, definido en la línea 4, fuera de este plano.

```
1  # Lista de puntos en la base (en el mismo plano)
2  L = [(1,0,0), (1/2,sqrt(3)/2,0), (-1/2,sqrt(3)/2,0), (-1,0,0), (-1/2,-sqrt(3)/2,0), (1/2,-sqrt(3)/2,0)]
3  # Vértice superior
4  V = (0,0,1)
5
6  N = len(L)
7
8  # Lista vectores que parten de L[0] al resto de
9  # los vértices de la base
10 Lv = []
11 for k in range(1,N):
12         Lv.append( vector(L[k])-vector(L[0]) )
13
14 # Vector de L[0] a V
15 v = vector(L[0])-vector(V)
16
17 # Suma las áreas de los N-2 tetraedros
18 vol = 0
19 for k in range(N-2):
20         A = matrix(3,3,[Lv[k],Lv[k+1],v])
21         vol += 1/6*abs( A.determinant() )
22
23 print('Volumen =', vol)
24
25 # Dibuja las aristas de la pirámide
26 P = line3d(L+[L[0]], thickness=10)
27 for k in range(N):
28     P += line3d([L[k],V], thickness=10)
29 P.show()
```

Cada tetraedro está formados por uno de los triángulos en que se divide la base y el vértice `V`. El volumen de cada uno de ellos se calcula en la línea 21 y la 23 muestra la suma total de los volúmenes. A modo de extra, las líneas a partir de la 25 hacen un dibujo de las aristas, el "esqueleto", de la pirámide.

3.3. Regla de Cramer, inversa y rango

La eliminación de Gauss permite que nosotros, o más a menudo los sirvientes de silicio bajo nuestro mando, calculen soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con cierta eficiencia. Por ejemplo, nuestro ordenador personal la llevará a cabo sin ningún remilgo en doble precisión sobre un sistema 100×100. La eliminación de Gauss también servía para calcular la matriz inversa y el rango.

Lo que vamos a ver ahora es que las soluciones de sistemas lineales, la inversa y el rango admiten fórmulas con determinantes. Si estos determinantes se hallan mediante eliminación de Gauss tal cosa no parece aportar demasiado a lo que sabíamos. En realidad, es así desde el punto de vista práctico en cuanto nos salimos de dimensión baja, e incluso a menudo en ella. Aunque profesionales y aficionados de ayer y hoy