```
Bp = [(1/sqrt(2),1/sqrt(2)), (-1/sqrt(2),1/sqrt(2))]
for k in range(2):
        P += arrow( (0,0), B[k], arrowsize=8, width=5)
        P += text('␣$\\vec{e}_'+str(k+1)+'$', B[k], fontsize=60, horizontal_alignment='left', color='black')
        P += arrow( (0,0), Bp[k], arrowsize=8, width=5)
        P += text('␣␣␣$\\vec{v}_'+str(k+1)+'$',Bp[k], vertical_alignment='bottom', fontsize=60, color='black')

# Punto
P += point([(1/2,1/2)], size=300, color='black', zorder=100)
P += line([(1/2,0),(1/2,1/2),(0,1/2)], thickness=3, linestyle='--')
P += text('$P$',(0.6,0.48), fontsize=40)

P.set_aspect_ratio(1)
P.axes(False)
show(P)
```

Cualquiera puede obtener algo similar en un instante con *software* de diseño gráfico. La única ventaja de tenerlo en un programa es la posibilidad de hacer mil y una variaciones ajustando números.

2.5. Suma e intersección de subespacios

Por algún motivo, el epígrafe de esta sección no está en el temario oficial de la asignatura pero no dejes de leer todavía porque hay una técnica para dotar de ecuaciones a los subespacios que no debemos pasar por alto en un curso de álgebra lineal. Posiblemente muchos tendrán la opinión muy razonable de que tampoco deben omitirse los temas del título en uno de estos cursos[11]. La razón de ser de esta sección es que yo me encuentro entre ellos y que así se facilita el uso de estas notas en una asignatura de álgebra lineal no afectada por esta ausencia anómala.

Dados subespacios V y W de un espacio vectorial, las definiciones de la *suma* $V+W$ y la *intersección* son las obvias. Concretamente, $V+W$ está compuesto por los vectores $\vec{v}+\vec{w}$ con $\vec{v}\in V$ y $\vec{w}\in W$ mientras que $V\cap W$ lo está por los vectores que pertenecen simultáneamente a V y W. Es evidente que $V\cap W$ es un subespacio apelando a la Proposición 2.1.1 y algo menos evidente pero similar que $V+W$ también lo es, todo lo que hay que pensar es que $V+W$ coincide con el conjunto de todas las combinaciones lineales posibles de vectores de V y W. Esta última frase nos da un procedimiento para "calcular" $V+W$: si obtenemos bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$ de V y W entonces $V+W=\mathcal{L}(\mathcal{B}_V\cup\mathcal{B}_W)$.

Algo que a estas alturas debes tener meridianamente claro es que pasando a coordenadas en una base (supuesta finita), cualquier espacio vectorial tiene su reflejo en K^n. En particular, basta con que entendamos el caso en que V y W son subespacios de un K^n y nos moveremos en ejemplos de este tipo a la largo de la sección, excepto por un par de incursiones anecdóticas con polinomios y matrices.

Hay dos maneras principales de presentar un subespacio de K^n, que más o menos

[11]Una excepción, la única que conozco, es [31]. Seguramente la ausencia de estos temas en el presente curso proviene de que el temario de la guía docente original era una copia bastante fiel de su tabla de contenidos.

se corresponden con los conceptos de imagen y núcleo, una consiste en dar un conjunto que lo genera, preferiblemente una base, la otra es dar unas ecuaciones $A\vec{x} = \vec{0}$ con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ que determinan los vectores del subespacio. Si tenemos la primera presentación, para obtener $V + W$ solo necesitamos unir los conjuntos que generan V y W, mientras que hallar $V \cap W$ no es tan fácil. Por otro lado, dadas ecuaciones lineales que determinan V y W basta imponerlas simultáneamente para obtener las que determinan $V \cap W$, mientras que no está claro cómo hallar $V + W$.

Después de que leas el número suficiente de veces el párrafo anterior deberías sacar la conclusión de que, con lo que sabemos hasta ahora, el único cabo suelto es hallar un procedimiento para obtener las ecuaciones de un subespacio a partir de una base o de un conjunto finito de vectores que lo genera. Este procedimiento consiste en aplicar eliminación de Gauss a las combinaciones lineales igualadas a un vector genérico y estudiar qué condiciones surgen de que haya solución para los coeficientes. En vez de intentar desentrañar esta frase, es mejor ir directamente a un ejemplo.

Consideramos el subespacio $V \subset \mathbb{R}^4$ con base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ con $\vec{v}_1 = (-1, 2, 2, -3)^t$ y $\vec{v}_2 = (5, -8, -6, 23)^t$ y queremos escribirlo como $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \,:\, A\vec{x} = \vec{0}\}$. Para ello aplicamos eliminación de Gauss a $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 = \vec{x}$ entendiéndolo como un sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas λ_1 y λ_2.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & x_1 \\ 2 & -8 & x_2 \\ 2 & -6 & x_3 \\ -3 & 23 & x_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & x_1 \\ 0 & 2 & 2x_1 + x_2 \\ 0 & 4 & 2x_1 + x_3 \\ 0 & 8 & -3x_1 + x_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & x_1 \\ 0 & 2 & 2x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & -2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & -11x_1 - 4x_2 + x_4 \end{array}\right).$$

Se sigue que la condición necesaria y suficiente para que existan λ_1 y λ_2 con $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 = \vec{x}$, o equivalentemente $\vec{x} \in V$, es que

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ -11x_1 - 4x_2 + x_4, \end{cases} \qquad \text{esto es,} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 0 \\ -11 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para comprobar el resultado es conveniente verificar que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ realmente cumplen las ecuaciones.

Consideremos ahora $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. Para hallar $V \cap W$ basta juntar las ecuaciones:

$$V \cap W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \,:\, B\vec{x} = \vec{0}\} \quad \text{con} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 0 \\ -11 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, al resolver la ecuación de W tomando $x_2 = \lambda$, $x_3 = \mu$, $x_4 = \nu$ parámetros arbitrarios, los vectores de W son de la forma $(-\lambda-\mu-\nu, \lambda, \mu, \nu)$, es decir, las combinaciones lineales de $\vec{v}_3 = (-1, 1, 0, 0)^t$, $\vec{v}_4 = (-1, 0, 1, 0)^t$ y $\vec{v}_5 = (-1, 0, 0, 1)^t$. De modo que se tiene $V + W = \mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_5\})$.

Si esto de hallar intersecciones y sumas de subespacios te parece poco natural, quizá te agrade la siguiente intersección encubierta que plantea un problema cuyo enunciado pertenece a las secciones anteriores pero que sería un poco lioso de resolver con las herramientas vistas hasta ahora. Lo que nos preguntamos es cuáles son los vectores de $\mathbb{R}^3$ que son simultáneamente combinación lineal de

$$C_1 = \{(3,3,4)^t, (2,1,5)^t\} \qquad \text{y de} \qquad C_2 = \{(1,1,2)^t, (1,3,-4)^t\}.$$

Para ello, hallamos las ecuaciones del subespacio generado por el primer conjunto:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & x_1 \\ 3 & 1 & x_2 \\ 4 & 5 & x_3 \end{array}\right) \underset{\substack{f_2\mapsto f_2-f_1 \\ f_3\mapsto 3f_3-4f_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2-x_1 \\ 0 & 7 & 3x_3-4x_1 \end{array}\right) \underset{f_3\mapsto f_3+7f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2-x_1 \\ 0 & 0 & -11x_1+7x_2+3x_3 \end{array}\right)$$

y la ecuación que define $\mathcal{L}(C_1)$ es $-11x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0$. Con el segundo conjunto procedemos de la misma forma:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 3 & x_2 \\ 2 & -4 & x_3 \end{array}\right) \underset{\substack{f_2\mapsto f_2-f_1 \\ f_3\mapsto f_3-2f_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2-x_1 \\ 0 & -6 & x_3-2x_1 \end{array}\right) \underset{f_3\mapsto f_3+3f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2-x_1 \\ 0 & 0 & -5x_1+3x_2+x_3 \end{array}\right)$$

para obtener la ecuación del subespacio $-5x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$. Los vectores que son combinación lineal de ambos conjuntos son los que satisfacen ambas ecuaciones. Esto nos lleva a un sistema de ecuaciones lineales que debemos resolver:

$$\begin{pmatrix} -11 & 7 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_2\mapsto 11f_2-5f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -11 & 7 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x_3 = \lambda \ \Rightarrow\ x_2 = -2\lambda,\ x_1 = -\lambda.$$

Entonces los vectores buscados son los de la forma $\lambda(-1,-2,1)^t$. Con el lenguaje de la intersección, esto es $\mathcal{L}(C_1) \cap \mathcal{L}(C_2)$.

Está claro que $V \cap W$ será mayor cuanto más tengan en común V y W y suena sensato que $V + W$ será menor porque habrá pocas sumas que no estén ya en V o en W. El resultado que cuantifica esta situación se parece a una relación entre uniones e intersecciones de conjuntos finitos[12] y lleva el nombre del padre más reconocido del álgebra lineal.

Proposición 2.5.1 (fórmula de Grassman)**.** *Si V y W son subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita entonces*

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W).$$

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \dots \vec{u}_k\}$ una base de $V \cap W$. Siempre se puede extender con ciertos vectores $\vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_n$ de modo que $\{\vec{u}_1, \dots \vec{u}_k, \vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_n\}$ sea base de V. El procedimiento consiste en ir añadiendo vectores de V linealmente independientes con

[12] Concretamente a $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$ donde $\#$ indica el número de elementos (no es un *hashtag*), la cual se prueba partiendo $A \cup B$ en $A \cap B$, en los que están en A pero no en B y en los que están en B pero no en A. La razón de la analogía queda patente en la demostración.

los anteriores (incluso podrían tomarse de una base[13] fijada de V) y en el momento en que no podamos seguir necesariamente $\mathcal{L}(\mathcal{B}_V) = V$ y, por tanto, $\mathcal{B}_V$ será base de V. De la misma forma, se tiene una base de W del tipo $\mathcal{B}_W = \{\vec{u}_1, \dots \vec{u}_k, \vec{w}_{k+1}, \dots, \vec{w}_n\}$. Está claro que $\mathcal{B}_V \cup \mathcal{B}_W$ genera $V + W$. Para ver que es base de $V + W$ hay que comprobar que sus elementos son linealmente independientes. Si tuviéramos una combinación lineal nula de sus elementos, se deduce

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{u}_i + \sum_{i=k+1}^{m} \mu_i \vec{v}_i = -\sum_{i=k+1}^{m} \nu_i \vec{w}_i.$$

El primer miembro es un vector de V y el segundo de W, así que la igualdad implica que ambos pertenecen a $V \cap W$. Como habíamos escogido los $\vec{w}_i$ linealmente independientes de los $\vec{u}_j$, que generan $V \cap W$, se tiene $\nu_i = 0$ y de ahí λ_i y μ_i porque $\mathcal{B}_V$ es base.

Por la definición de dimensión, $\dim(V+W)$ es el número de elementos de $\mathcal{B}_V \cup \mathcal{B}_W$ que, con nuestra notación, es $m+n-k$, porque los k primeros vectores están repetidos, y esto coincide con $\dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$. $\square$

Si $V \cap W = \{\vec{0}\}$, cada vector $\vec{u} \in V + W$ se escribe de forma única como $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ con $\vec{v} \in V$, $\vec{w} \in W$, porque una base de $V + W$ se obtiene uniendo las de V y W, que son necesariamente disjuntas. En este caso se dice que se tiene una *suma directa* y se escribe $V \oplus W$.

Un ejemplo tonto es que $\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_2$ con $V_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ (el eje X) y $V_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$ (el eje Y). Claramente $V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$ y cada vector de $\mathbb{R}^2$ se representa de forma única como la suma de sus "sombras" en los ejes X e Y.

Un ejemplo menos tonto y fuera de $\mathbb{R}^n$ es $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ con $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A = A^t\}$ (las *matrices simétricas*) y $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A = -A^t\}$ (las *matrices antisimétricas*). Es evidente que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{O\}$. Cada matriz $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se representa de forma única como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica gracias a la igualdad

$$M = S + A \qquad \text{con} \quad S = \frac{1}{2}(M + M^t) \quad \text{y} \quad A = \frac{1}{2}(M - M^t).$$

La Proposición 2.5.1 nos puede librar a veces del cálculo efectivo de $V + W$. Un ejemplo en $\mathbb{R}_3[x]$ es

$$V = \{P \in \mathbb{R}_3[x] : P(0) = P(1) = 0\}, \qquad W = \{P \in \mathbb{R}_3[x] : P(-2) = P(-1) = 0\}.$$

Se tiene $V \cap W = \{0\}$ porque cada polinomio $a + b + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x]$ no puede tener cuatro raíces, excluyendo el polinomio nulo. Las ecuaciones que definen V son $a = 0$, $a+b+c+d = 0$ mientras que las que definen W son $a-2b+4c-8d = 0$, $a-b+c-d = 0$. En ambos casos el rango e 2 y por tanto $\dim(V) = \dim(W) = \dim(\mathbb{R}_3[x]) - 2 = 2$.

[13]Comentario pedante: Esto es prácticamente el enunciado de un resultado llamado *teorema de Steinitz*. Juiciosamente, en el mundo anglosajón se le suele degradar a lema.

Por la fórmula de Grassman, $\dim(V+W)=4$ y como $V+W$ es subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$ que también tiene dimensión 4, se tiene $\mathbb{R}_3[x]=V+W$, de hecho $\mathbb{R}_3[x]=V\oplus W$.

Para terminar, veamos un ejercicio de un examen pasado. Allí se definían los subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} V=\mathcal{L}(\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}), \\ W=\mathcal{L}(\{\vec{w}_1,\vec{w}_2\}) \end{cases} \quad \text{con} \quad \vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \vec{v}_2=\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix},\ \vec{w}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},\ \vec{w}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

y se pedía hallar una base de $V\cap W$ y decidir si $V+W=\mathbb{R}^3$. Para lo primero buscamos las ecuaciones de V mediante eliminación de Gauss

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x_1 \\ 2 & 3 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x_1 \\ 0 & -3 & -2x_1+x_2 \\ 0 & -2 & -x_1+x_3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x_1 \\ 0 & -3 & -2x_1+x_2 \\ 0 & 0 & (x_1-2x_2+3x_3)/3 \end{array}\right).$$

Así $V=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \ : \ x_1-2x_2+3x_3=0\}$. De la misma forma, para W

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 3 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -2 & -3x_1+x_2 \\ 0 & -1 & -x_1+x_3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -2 & -3x_1+x_2 \\ 0 & 0 & (x_1-x_2+2x_3)/2 \end{array}\right)$$

y se obtiene $V=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \ : \ x_1-x_2+2x_3=0\}$. Resolviendo simultáneamente las ecuaciones de V y W se deduce que las soluciones son proporcionales a $(-1,1,1)^t$ por tanto este vector constituye una base. La manera larga de mostrar $V+W=\mathbb{R}^3$ es comprobar que la matriz formada por $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ tiene rango 3 (recuérdese la Proposición 2.2.5) y la manera corta es usar la fórmula de Grassman para concluir $\dim(V+W)=2+2-1=3$.

Exprimiendo el silicio [opcional]. En aras de la brevedad solo veremos un programa para `sagemath` que resuelve el último ejemplo dando bases de $V\cap W$ y de $V+W$. La única instrucción nueva está en la línea 12 y se explica por sí sola.

```
1  # Vectores
2  v1 = vector([1,2,1])
3  v2 = vector([3,3,1])
4  w1 = vector([1,3,1])
5  w2 = vector([1,1,0])
6  # Se utiliza Q^3 en lugar de R^3
7  # para evitar cálculos aproximados
8  Q3 = VectorSpace(QQ,3)
9  V = Q3.span([v1, v2])
10 W = Q3.span([w1, w2])
11 # Construye la intersección y la suma
12 interseccion = V.intersection(W)
13 suma = Q3.span([v1, v2, w1, w2])
14 # Bases
15 print(interseccion.basis())
16 print(suma.basis())
17 # Comprueba que la suma es todo el espacio
18 print(suma == Q3)
```

Como se indica en los comentarios, se utiliza $\mathbb{Q}^3$ en vez de $\mathbb{R}^3$ para forzar el cálculo simbólico.