Capítulo 2

Espacios vectoriales

2.1. Definición y ejemplos

Imagina que en uno de esos documentales de ínfima audiencia que todos decimos que vemos mencionan los espacios vectoriales y te entra curiosidad acerca de qué es aquello. Si preguntas a un matemático corres el riesgo de que te diga qué son realmente, su definición rigurosa, y te quedes como antes y además con pocas ganas de estudiar matemáticas. Lo mismo se aplica a otras estructuras algebraicas[1]. Estas estructuras, entre las que se cuenta la de espacio vectorial, son una abstracción *a posteriori* motivada por ciertos ejemplos destacados o al menos por situaciones matemáticas naturales. Aunque en los textos aparezcan en los primeros capítulos por la sana o insana obsesión de los matemáticos por guardar el orden deductivo, históricamente son culminaciones. Por ello causan tanta perplejidad fuera del círculo de los devotos e iniciados. Hay que recordar que no ya la estructura de espacio vectorial sino la propia álgebra lineal tuvo detractores en sus orígenes[2].

Antes de asustar a nadie, la idea básica es que un *espacio vectorial* V es cualquier conjunto de cosas, que denominaremos *vectores*, tales que se pueden multiplicar por números y sumar entre sí. En breve, tal que dados $\vec{u}, \vec{v} \in V$ y números λ y μ, se tenga que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ pertenece a V, que también sea un vector.

En la práctica esto es lo que tienes que tener en mente y al final bajo ciertas hipótesis recobraremos de aquí una definición rigurosa. La pregunta es por qué si buscamos la definición en la Wikipedia, en un libro o en la lección de un matemático recibimos una lista rara y larga de propiedades. La respuesta es que lo anterior es demasiado impreciso como para considerarlo una definición de verdad porque no

[1]En mi opinión, los físicos son mucho más agradecidos. Si les preguntas qué es un electrón o qué es el modelo estándar te dirán una mentirijilla metafórica aunque en su investigación estén usando modelos basados en estructuras algebraicas avanzadas.

[2]Se considera a H. Grassman el padre del álgebra lineal junto con el *álgebra exterior*. Un crítico fue su contemporáneo W.R. Hamilton quien formuló parte de la física de su tiempo con sus *cuaterniones*, unos vectores de cuatro coordenadas que también se podían multiplicar. Aunque el álgebra lineal y el álgebra exterior ganaron la partida, la notación de Hamilton ha perdurado en esas letras **i**, **j**, **k** que todavía se emplean al calcular productos vectoriales.

especifica las propiedades básicas que deben tener una suma de vectores y una multiplicación por números que en contextos más o menos exóticos no tienen nada que ver con las que nos son familiares. Por mencionar algo más concreto, un punto importante es precisar qué significa “número”, por ejemplo permitiremos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ e incluso en ciertas aplicaciones se utilizan números que desconoces pero prohibiremos $\mathbb{Z}$. Una definición matemática no puede permitirse cabos sueltos, en nuestro caso debe ser una lista completa de lo que se puede y no se puede hacer para que algo merezca llamarse espacio vectorial.

A pesar de no tener todavía una definición a prueba de matemáticos, veamos algunos ejemplos. Más adelante los comprobaremos con más cuidado.

El espacio de vectores de toda la vida $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial con la suma coordenada a coordenada y la multiplicación simultánea de todas las coordenadas por un número real. De la misma forma $\mathbb{C}^n$ es un espacio vectorial escogiendo como números $\mathbb{C}$. De hecho si decretamos que solo está permitida la multiplicación de números reales, todavía $\mathbb{C}^n$ sería un espacio vectorial, que a veces se llama $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ para distinguirlo del habitual, ya que $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{C}^n$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ implican $\lambda\vec{v} + \mu\vec{v} \in \mathbb{C}^n$.

También son espacios vectoriales $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ pues a efectos de hacer sumas o multiplicaciones por números siempre podemos recolocar los elementos en una columna para tener vectores de $\mathbb{R}^{mn}$ o $\mathbb{C}^{mn}$.

Un ejemplo general que contiene a muchos de los que se te puedan ocurrir son las funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ o $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ con X un conjunto fijado. Si X es el conjunto de seres humanos, un vector de este espacio sería asignarles a cada uno su número de pasaporte o su altura o a unos π y a otros e. El caso es que aunque no sepamos sumar personas para que den otra persona o multiplicarlas por números, sí podemos hacerlo con los números que les asignamos y eso es suficiente.

Si $X = \mathbb{R}$ un ingeniero puede considerar que este es un espacio vectorial de señales que para cada tiempo da por ejemplo el valor en ese instante de la onda de radio entrante en un receptor. Si se ha procedido a un muestreo de la señal examinándola en tiempos discretos, como es natural en el procesamiento digital, entonces quizá prefiera considerar $X = \mathbb{Z}$ y así el espacio vectorial está formado por tiras infinitas a izquierda y derecha $(x_n)_{n=-\infty}^{\infty}$.

Vamos por fin con la temida definición rigurosa de espacio vectorial. Es raro que conozcas todos los términos que aparecen en ella. La iremos desentrañando poco a poco después de enunciarla. La historia del concepto está descrita en [11].

Sean V un conjunto, K un cuerpo y dos operaciones $+ : V \times V \longrightarrow V$, $\cdot : K \times V \longrightarrow V$. Se dice que V es un *espacio vectorial* sobre K con estas operaciones si $(V, +)$ es un grupo abeliano y además para $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $a, b \in K$ cualesquiera se cumplen las propiedades:

$$\begin{array}{ll} 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}, & (a+b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}, \\ a \cdot (b \cdot \vec{u}) = (ab) \cdot \vec{u}, & a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}. \end{array}$$

A los elementos de K se les suele llamar *escalares* para diferenciarlos de los de V que son *vectores*. Aparte de esto, un par de observaciones con respecto a la notación:

incluso si el símbolo "$\cdot$" no representara el producto de toda la vida, se suele omitir y en la primera propiedad 1 es el elemento unidad de K, el que cumple $1a = a$ para $a \in K$.

Seguramente tu primera duda es qué es un *cuerpo*. Es un conjunto donde hay definidas una suma, una resta, una multiplicación y una división (salvo por cero) con las propiedades habituales. Si esto te resulta vago, en rigor $(K, +)$ y $(K - \{0\}, \times)$ deben ser grupos abelianos (sigue leyendo) y además se deben cumplir las *propiedades distributivas*, las reglas de operar paréntesis. En este curso K será siempre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y es difícil que se te ocurran más ejemplos aparte de $\mathbb{Q}$ aunque hay otros bien distintos e importantes[3]. Conservaremos no obstante en la teoría K como un cuerpo genérico.

En particular, no permitimos $K = \mathbb{N}$ ni $K = \mathbb{Z}$ porque, en general, en el primero no se puede restar sin salirse del conjunto y en el segundo no se puede dividir.

El otro término que te puede resultar extraño en la definición es lo de *grupo abeliano*. Un conjunto con una operación, en nuestro caso V con $+$, se dice que es un grupo abeliano si satisface la *propiedad conmutativa*, la *propiedad asociativa*, tiene elemento neutro y tiene elemento inverso[4]. Estos dos últimos se suelen indicar en espacios vectoriales con $\vec{0}$ y $-\vec{u}$.

Las cuatro propiedades al final de la definición podrán parecer arbitrarias pero se dejan leer, no involucran términos nuevos.

Ahora, si queremos probar de verdad que fijado X el conjunto de funciones $V = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}\}$ con la suma y producto habituales es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, tenemos que comprobar en principio un montón de cosas. El truco para evitarlo es apelar a lo que ya conocemos o supuestamente conocemos. Primero, todos sabemos sumar, restar, multiplicar y dividir números reales, por tanto $\mathbb{R}$ es un cuerpo. ¿Es $(V, +)$ un grupo abeliano? Sí y resulta que probarlo no entraña nada nuevo porque sumar funciones es sumar sus valores por tanto se sigue de que $(\mathbb{R}, +)$ es grupo abeliano por ser K cuerpo. De la misma forma, las cuatro propiedades al final de la definición de espacio vectorial se seguirían de que $\mathbb{R}$ es un cuerpo si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}$ y eso es todo lo que necesitamos porque, como acabamos de decir, las funciones se operan operando sus valores por separado.

Si $X = \{1, 2, \dots, n\}$ podemos identificar $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con un vector de toda la vida de $\mathbb{R}^n$, donde la i-ésima coordenada dada por el valor de $f(i)$. De lo anterior se deduce que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. De la misma forma se tiene que $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ tomando como X todas las posibles posiciones de los elementos, $X = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (m, n)\}$ e identificando $f(i, j)$ con a_{ij}. Por supuesto lo mismo se aplica a $\mathbb{C}^n$ y a $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$.

[3]Uno poco útil en ingeniería es $K = \{a + b\sqrt{2} \,:\, a, b \in \mathbb{Q}\}$, la división se puede hacer sin salirse de K racionalizando. Un ejemplo todavía más raro y que, lo creas o no, es parte de una familia útil en ingeniería, es $K = \{0, 1, \heartsuit, \clubsuit\}$ donde el 0 y 1 tienen las propiedades de siempre ($0a = 0$, $1a = a$, $0 + a = a$) mientras que $\heartsuit$ y $\clubsuit$ son dos "números" nuevos sujetos a las reglas $\heartsuit + \clubsuit = 1$, $1 + 1 = \heartsuit + \heartsuit = \clubsuit + \clubsuit = 0$, $\heartsuit^2 = \clubsuit$, $\clubsuit^2 = \heartsuit$ y $\heartsuit\clubsuit = 1$. Por ejemplo, si queremos calcular $\heartsuit/\clubsuit$ la penúltima igualdad dice que $\clubsuit\clubsuit = \heartsuit$ así que $\clubsuit = \heartsuit/\clubsuit$.

[4]Si no conoces estas propiedades de memoria, en fórmulas son $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$, $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$, $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ y $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

Ahora vamos a dar un último pase mágico por el que la definición no rigurosa pasará a serlo en los ejemplos del curso y uno podrá olvidarse ya de este lío de propiedades.

Dado V un espacio vectorial, se dice que W es un *subespacio vectorial* de V si se tiene la inclusión $W \subset V$ y es un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo con las operaciones definidas en V.

Fácil, ¿verdad? Un subespacio vectorial es solo un espacio vectorial dentro de otro. Pues bien, para los subespacios no es necesario comprobar toda la lista de propiedades porque ya se cumplen en un sitio mayor. Lo único que hay que comprobar es ¡la definición intuitiva!

Proposición 2.1.1. *Sea V un espacio vectorial sobre K. Un subconjunto $W \subset V$ define un subespacio vectorial de V (y en particular es un espacio vectorial) si y solo si para todo $\lambda, \mu \in K$ y $\vec{u}, \vec{v} \in W$ se tiene $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in W$.*

Demostración. Primero hay que saber que en todo espacio vectorial se cumple $0\vec{u} = \vec{0}$ y $\vec{u} + (-1)\vec{u} = \vec{0}$. Aunque te parezca escandalosamente obvio, esto necesita una pequeña demostración pues no está en la lista de propiedades. Dándola por hecha[5], de $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in W$ se tiene tomando $\lambda = \mu = 0$ y $\lambda = -1$, $\mu = 0$ que los elementos neutro e inverso están en W. Por otro lado, con $\lambda = \mu = 1$ y λ arbitrario, $\mu = 0$ se deduce que las operaciones $+$ y $\cdot$ están bien definidas en W, no se salen de W. La conmutativa y asociativa de $(W, +)$ y las cuatro propiedades de la definición para W se siguen de las de V porque $W \subset V$.

La otra implicación es obvia, si W es un espacio vectorial el producto por escalares y la suma de vectores están bien definidos en W y por tanto $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in W$. □

Terminemos con un ramillete de ejemplos y contraejemplos.

Fijada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, el conjunto $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$ es un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$). Claramente $V \subset \mathbb{R}^n$ y basta ver que es subespacio usando la Proposición 2.1.1. Si $\vec{u}, \vec{v} \in V$ se cumple $A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}$, por tanto $A(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda A\vec{u} + \mu A\vec{v} = \vec{0}$, así pues $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in V$. Este ejemplo, el espacio vectorial formado por el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo, es el más importante del curso. En cierto modo que exploraremos más adelante, engloba todos los ejemplos que nos interesarán.

Dados $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\vec{b} \neq \vec{0}$, el conjunto $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{b}\}$ no es un espacio vectorial. Si $\vec{u} \in V$ entonces $2\vec{u} \notin V$ ya que $A(2\vec{u}) = 2A\vec{u} = 2\vec{b} \neq \vec{b}$. Esto significa que multiplicar por dos no está bien definido en V. No tenemos una operación $\cdot : K \times V \longrightarrow V$. Una demostración más rápida, pero más rara, es notar simplemente que $\vec{0} \notin V$.

Los polinomios con coeficientes reales $\mathbb{R}[x]$ forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Son un subconjunto de todas las funciones $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ así que podemos aplicar la Proposición 2.1.1. Si $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ entonces es obvio que $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}[x]$.

[5] Si no tienes gana de pensarlo, lo primero se sigue de $\vec{0} = \vec{u} + (-\vec{u}) = (0+1)\vec{u} + (-\vec{u}) = 0\vec{u} + \vec{0} = 0\vec{u}$ y lo segundo, una vez sabido lo primero, de $\vec{0} = 0\vec{u} = (1-1)\vec{u} = \vec{u} + (-1)\vec{u}$.

Por supuesto, no hay nada especial en que los polinomios sean reales. Los polinomios con coeficientes complejos $\mathbb{C}[x]$ forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

De la misma forma los polinomios de $\mathbb{R}[x]$ con grado menor o igual que 3, denotados a veces con $\mathbb{R}_3[x]$, también forman un espacio vectorial. Sin embargo los de grado exactamente 3 no, ya que por ejemplo $P = 2x^3 + x$ y $Q = 1 - 3x^3$ tienen grado 3 pero $3P + 2Q$ no lo tiene. En general, los polinomios reales de grado menor o igual que n, denotados $\mathbb{R}_n[x]$, forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Lo mismo se aplica, sobre $\mathbb{C}$, para $\mathbb{C}_n[x]$ definido de la misma manera con coeficientes complejos.

Las matrices cuadradas simétricas reales $V = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,:\, A = A^t\}$ forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ porque $V \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y si $A, B \in V$ entonces $(\lambda A + \mu B)^t = \lambda A^t + \mu B^t = \lambda A + \mu B$.

Sin embargo el análogo natural complejo $V = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,:\, A = A^\dagger\}$ no es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, solo sobre $\mathbb{R}$. El problema es que si hacemos la traspuesta conjugada de $\lambda A + \mu B$ obtenemos $\bar{\lambda} A^\dagger + \bar{\mu} B^\dagger$ y $\lambda = \bar{\lambda}$, $\mu = \bar{\mu}$ solo se cumple para reales. Por ejemplo, $I \in V$ pero $iI \notin V$.

Las funciones reales 1-periódicas, es decir, las que cumplen $f(x) = f(x+1)$ forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Este tipo de señales, como las ondas sinusoidales $\operatorname{sen}(2\pi x)$ y $\cos(2\pi x)$, son de gran importancia en ingeniería.

Fijados $a, b > 0$ consideremos el conjunto V formado por todas las funciones reales $y = y(x)$ con dos derivadas tales que satisfacen la ecuación del oscilador armónico amortiguado $y'' + ay' + by = 0$. Se cumple que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ porque es un subconjunto del espacio vectorial de todas las funciones $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y si $y, z \in V$, $\lambda, \mu \in V$ se tiene

$$(\lambda y + \mu z)'' + a(\lambda y + \mu z)' + b(\lambda y + \mu z) = \lambda(y'' + ay' + by) + \mu(z'' + az' + bz) = 0,$$

ya que cada uno de los paréntesis de la última expresión es nulo.

Exprimiendo el silicio [opcional]. Esta sección ha tenido demasiado de atracón teórico como para que podamos hacer muchas cosas con el ordenador. Solo lo usaremos para intrigarte con uno de los espacios vectoriales más pequeños añadiendo la promesa de que la teoría subyacente, que excede este curso, es importante en ciertas aplicaciones.

El cuerpo más pequeño que se puede construir es el que solo contiene el elemento neutro de la suma y de la multiplicación, $K = \{0, 1\}$. Para que la suma no se salga de K la única posibilidad es decretar $1 + 1 = 0$. En la práctica K se usa para representar un *bit* pero si el decreto anterior te parece extraño en términos informáticos, puedes pensar que 0 significa “ser par” y 1 significa “ser impar” lo que cuadra con todas las operaciones en K.

Las líneas 1–8 del siguiente código `sagemath` definen el espacio vectorial $V = K^2$, formado por pares de elementos de K y muestra todos los vectores posibles. Por supuesto son `(0,0)`, `(1,0)`, `(0,1)` y `(1,1)`.

```
1  # K es el cuerpo con dos elementos {0,1}
2  K = GF(2)
3  # V es el espacio vectorial de pares de bits
4  V = VectorSpace(K,2)
5  print('Lista de vectores:')
6  for v in V:
7          print(v)
8  print('============')
9
10 cero = vector( K, [0,0] )
11 uno = vector( K, [1,0] )
12 corazon = vector( K, [0,1] )
13 trebol = vector( K, [1,1] )
14
15 print('Tabla de sumas:')
16 print('C+T =',corazon + trebol)
17 print('1+1 =',uno + uno)
18 print('C+C =',corazon + corazon)
19 print('T+T =',trebol + trebol)
```

En las líneas 10–13 se dan respectivamente los curiosos nombres `cero`, `uno`, `corazon` y `trebol` a los vectores de V. El resto del programa comprueba que con estos nombres la tabla de sumas es exactamente igual que la del extraño cuerpo $\{0,1,\heartsuit,\clubsuit\}$ de cuatro elementos mencionado en una nota a pie de página. Esto implica que hay una forma no solo de sumar y restar vectores de V sino también de multiplicarlos y dividirlos (salvo por cero). Pues bien, esto es un hecho general. Un teorema asegura que para cualquier cuerpo finito K y cualquier n hay una manera de multiplicar y dividir vectores en K^n que convierte este espacio vectorial en un cuerpo[6].

Antes de que pienses que los matemáticos se preocupan por cosas muy raras, debes saber que en el caso de $K=\{0,1\}$ esta estructura adicional sobre tiras de bits que permite sumarlas, restarlas, multiplicarlas y dividirlas conservando su longitud, es crucial en la corrección de errores al reproducir soportes digitales como CD, DVD o Blu-ray. Tal corrección no es un lujo, simplemente sin ella no funcionarían porque incluso recién salidos de fábrica, antes de que los rayes, contienen muchos errores de grabación. Si consideras que estos soportes son antediluvianos, debes saber que la corrección de errores también se utilizan en las memorias USB para alargar su vida útil. Quizá mientras lees estos apuntes se haya averiado alguno de los bits en el *pendrive* donde los almacenas pero no sufrirás de pánico informático hasta que el número de fallos colapse el algoritmo de corrección de errores.

2.2. Bases y dimensión

Pensemos en $\mathbb{R}^2$ que identificamos con todos los puntos o direcciones del plano. Tenemos claro que su dimensión es dos porque necesitamos especificar una x y una y. Alguien con educación matemática elemental nos podría decir que hay cuatro puntos cardinales y nosotros convencerle de que usando números negativos hay redundancia en ellos, 3 pasos al sur son -3 pasos al norte. Todavía hay más redundancia si introducimos las direcciones intermedias de la rosa de los vientos, como el noreste. Aun

[6]Un pionero en la introducción de estos cuerpos finitos fue É. Galois, un matemático de vida azarosa en tiempos de la restauración monárquica francesa que murió en un duelo con tan solo 20 años. La notación `GF` que emplea `sagemath` son las iniciales de *Galois field*.