• Estudia si la matriz $A$ es diagonalizable donde

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 \\ 6 & 3 & 1 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

---

Calculamos primero el polinomio característico $|A - \lambda I|$. Sumando a la tercera y la primera filas la segunda, sacando el factor $-\lambda - 1$ y restando a la segunda la tercera:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\lambda & 0 \\ 6 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\lambda & 0 \\ 6 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda+1) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\lambda & 0 \\ 6 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por la última columna, resulta $-(\lambda+1)(\lambda^2+3\lambda+2) = -(\lambda+1)^2(\lambda+2)$. De $\lambda_1 = -1$ sale solo un autovector independiente porque $\text{rg}(A+I) = 2$ (este es un cálculo sencillo) implica que el sistema $(A+I)\vec{x} = \vec{0}$ solo tiene $3-2=1$ solución linealmente independiente. De $\text{rg}(A+2I) = 2$ (o acotando por la multiplicidad) se sigue lo mismo para $\lambda_2 = -2$. No es diagonalizable: solo hay dos autovectores linealmente independientes y necesitamos tres.

---

• Calcula la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (-5, 6, 2, 2)^t$ sobre el subespacio de $\mathbb{R}^4$ que tiene como base $\mathcal{B} = \{(1, 2, 1, -1)^t, (0, 1, -1, 1)^t\}$.

---

Llamemos $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ a los vectores de $\mathcal{B}$. Como $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$, la base es ortogonal y basta aplicar la fórmula

$$P_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2}\vec{u}_1 + \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|^2}\vec{u}_2 = \frac{7}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{6}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

---

• Calcula todos los valores de $x$ para los que los vectores $(x, 1, -1)^t$, $(x-1, -1, 1)^t$ y $(1, 1, 1)^t$ determinen un tetraedro de volumen 1.

---

Sumando la segunda fila a la tercera y desarrollando por ella, el determinante de la matriz formado por los vectores en columna es:

$$\begin{vmatrix} x & x-1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x-1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(-2x+1).$$

Sabemos la fórmula $\text{Vol}(T) = \frac{1}{6}|\det(A)|$, que en nuestro caso da $|-2x+1|/3 = 1$. El argumento del valor absoluto puede ser positivo o negativo, lo que conduce a las ecuaciones $-2x+1=3$ y $2x-1=3$. Por tanto los valores posibles son $x=-1$ y $x=2$.

---

• ¿Existe alguna matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ distinta de la identidad que tenga polinomio característico $|A-\lambda I| = (\lambda-1)^2$? Razona la respuesta.

---

Sí, un ejemplo fácil es $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y otro más complicado, $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

---

• Halla una base en la que se diagonalice la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ donde $i = \sqrt{-1}$.

---

El polinomio característico es $(-\lambda)^2 + i^2 = \lambda^2 - 1$ por tanto los valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$, que llevan, respectivamente, a las siguientes ecuaciones para los vectores propios

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}.$$

Una solución de la primera es, por ejemplo, $\vec{v}_1 = (i,1)^t$ y $\vec{v}_2 = (-i,1)^t$ lo es de la segunda. Por tanto, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base válida.

---

• ¿Existe alguna matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que sus columnas sean ortogonales pero sus filas no? Razona la respuesta.

---

Sí, por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

---

**Puntuaciones y comentarios en los "Criterios de corrección"**