• Calcula la dimensión del siguiente subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$V = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,:\, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Escribamos $x_1 = a_{11}$, $x_2 = a_{12}$, $x_3 = a_{21}$, $x_4 = a_{22}$. Se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - 2x_3 & x_2 - 2x_4 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 - 2x_1 \\ x_3 & x_4 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Entonces las ecuaciones que definen el subespacio son $2x_1 - 2x_4 = 0$, $x_3 = 0$. Escribiéndolas como $M\vec{x} = \vec{0}$ con $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ es evidente que $\mathrm{rg}(M) = 2$ (la primera fila es $2, 0, 0, -2$ y la segunda $0, 0, 1, 0$) por tanto $\dim(V) = 4 - \mathrm{rg}(M) = 4 - 2 = 2$.

• Calcula la dimensión del núcleo y de la imagen del endomorfismo $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ dado por $f(P) = P + (1-x)P'$ con P' la derivada y $\mathbb{R}_2[x]$ los polinomios de grado a lo más 2.

Tomemos la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Se tiene $f(1) = 1$, $f(x) = 1$ y $f(x^2) = 2x - x^2$. Escribiendo en columna sus coordenadas en $\mathcal{B}$, obtenemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rg}(A) = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rg}(A) = 2, \\ \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}_2[x] - \mathrm{rg}(A) = 3 - 2 = 1. \end{cases}$$

Que el rango es dos se sigue de que tras $f_3 \mapsto f_3 + f_2/2$, se obtiene la forma escalonada.

• Resuelve el sistema con coeficientes complejos

$$\begin{cases} ix + (1-i)y = 2 + i, \\ (1+i)x + 2iy = 3i - 1. \end{cases}$$

Aplicando eliminación de Gauss (nótese que $-(1+i)/i = i - 1$)

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & 1-i & 2+i \\ 1+i & 2i & 3i-1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 \mapsto f_2 + (i-1)f_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} i & 1-i & 2+i \\ 0 & 4i & -4+4i \end{array}\right).$$

Las cuentas relevantes son, con detalle, $(i-1)(1-i) + 2i = 2i + 2i = 4i$ y $(i-1)(2+i) + 3i - 1 = -3 + i + 3i - 1 = -4 + 4i$. Utilizando $i^{-1} = -i$ se tiene

$$y = \frac{-4+4i}{4i} = 1 + i \qquad \text{y} \qquad x = -i\big(2 + i - (1-i)(1+i)\big) = -i \cdot i = 1.$$

• ¿Existe alguna matriz $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tal que $(A+I)(A^t+I)$, con I la matriz identidad, tenga determinante negativo? Razona la respuesta.

No. $|A^t+I| = \big|(A+I)^t\big| = |A+I|$ por tanto el determinante de la matriz del enunciado es $|A+I|\cdot|A^t+I| = |A+I|^2 \ge 0$.

• Halla una base del núcleo y otra de la imagen para la aplicación lineal

$$f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \text{definida por} \quad f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\vec{x}.$$

Sea A la matriz. Utilizando eliminación de Gauss para resolver $A\vec{x}=\vec{0}$, se obtiene

$$A \underset{f_2\mapsto f_2-f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad x_3=\lambda \ \Rightarrow\ x_2 = 2\lambda \ \Rightarrow\ x_1 = -7\lambda.$$

Por tanto todos los vectores de $\mathrm{Ker}(f)$ son múltiplos de $\vec{v} = (-7,2,1)^t$ y una base del núcleo es $\mathcal{B}_K = \{\vec{v}\}$. En la forma escalonada anterior hay pivotes en la primera y la segunda columna, que en A son $\vec{c}_1 = (1,1)^t$, $\vec{c}_2 = (3,2)^t$, de donde una base de $\mathrm{Im}(f)$ es $\mathcal{B}_I = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2\}$.

• ¿Existe alguna matriz $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{rg}(AA^t) = 4$? Razona la respuesta.

No. $\mathrm{rg}(A) \le 3 \Rightarrow A^t\vec{x} = \vec{0}$ compatible indeterminado $\Rightarrow AA^t\vec{x} = \vec{0}$ también lo es (porque las soluciones del primer sistema también resuelven el segundo) $\Rightarrow \mathrm{rg}(AA^t) < 4$.

Comentarios y soluciones alternativas en los “Criterios de corrección”