• Calcula todos los valores de a para los que los vectores $(1, a-2, 2)^t$, $(1, a-1, 5)^t$ y $(0, a+3, a+1)^t$ determinen un paralelepípedo de volumen 10.

Sabemos que el volumen coincide con el determinante salvo el signo. Restando las dos primeras filas y desarrollando por la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & a-2 & 2 \\ 1 & a-1 & 5 \\ 0 & a+3 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a-2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & a+3 & a+1 \end{vmatrix} = a+1-3(a+3) = -2a-8.$$

Por tanto, $-2a-8 = 10$ o $-2a-8 = -10$. Estas posibilidades equivalen a $a = -9$ y $a = 1$.

• Dados el vector $\vec{v} = (3, -1, 5)^t$ y el subespacio $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$, calcula la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre W.

Se tiene $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} \cdot \vec{n} = 0\}$ con $\vec{n} = (2, -1, 1)^t$, por tanto $W^\perp$ está generado por $\vec{n}$ y se cumple:

$$P_{W^\perp}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{12}{6}\vec{n} \quad \Rightarrow \quad P_W(\vec{v}) = \vec{v} - P_{W^\perp}(\vec{v}) = \vec{v} - 2\vec{n} = (-1, 1, 3)^t.$$

• Halla una base del núcleo y otra de la imagen para la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \text{definida por} \quad f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Sea A la matriz. Utilizando eliminación de Gauss para resolver $A\vec{x} = \vec{0}$, se obtiene

$$A \underset{f_2 \mapsto f_2 - f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \lambda \ \Rightarrow \ x_2 = 2\lambda \ \Rightarrow \ x_1 = -7\lambda.$$

Por tanto todos los vectores de $\mathrm{Ker}(f)$ son múltiplos de $\vec{v} = (-7, 2, 1)^t$ y una base del núcleo es $\mathcal{B}_K = \{\vec{v}\}$. En la forma escalonada anterior hay pivotes en la primera y la segunda columna, que en A son $\vec{c}_1 = (1, 1)^t$, $\vec{c}_2 = (3, 2)^t$, de donde una base de $\mathrm{Im}(f)$ es $\mathcal{B}_I = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2\}$.

• ¿Existe alguna matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ con determinante 2 tal que sus columnas formen una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$? Razona la respuesta.

Sabemos por la teoría (o directamente, recordando cómo se multiplican matrices) que si las columnas de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ forman una base de $\mathbb{R}^n$ entonces $A^tA = I$ (se dice que A es *ortogonal*). Tomando determinantes, $|A|^2 = 1$ y por tanto las únicas posibilidades son $|A| = \pm 1$.

• Halla una base en la que se diagonalice la matriz $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

El polinomio característico es $(-2-\lambda)(5-\lambda)+12 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$. Resolviendo la ecuación, los valores propios resultan $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$, que llevan, respectivamente, a las siguientes ecuaciones para los vectores propios

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}.$$

Una solución de la primera es, por ejemplo, $\vec{v}_1 = (2, -3)^t$ mientras que $\vec{v}_2 = (1, -2)^t$ lo es de la segunda. Por tanto, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base válida.

• ¿Existe alguna matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tal que $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ tenga $x = 1$, $y = i$, con $i = \sqrt{-1}$, como solución? Razona la respuesta.

Sí, un ejemplo es $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 2 & i \end{pmatrix}$.

Puntuaciones y comentarios en los “Criterios de corrección”