Examen final de álgebra lineal (conv. extraordinaria) 10 de junio de 2022

Apellidos y Nombre: ....

.... **DNI:**......................................

1) [2 puntos] Resuelve el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ix+2y=5, \\ x+(1-i)y=2-3i. \end{cases}$

Multiplicando la primera ecuación por i y sumándosela a la segunda, se tiene

$$\left.\begin{aligned} ix+2y &= 5 \\ (1+i)y &= 2+2i \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{2+2i}{1+i}=2, \quad x=\frac{5-2\cdot 2}{i}=\frac{1}{i}=-i.$$

---

2) [2 puntos] Calcula una base de $V=\{\vec{x}\in\mathbb{C}^3 \,:\, x+(1-i)y+iz=0\}$ y halla las coordenadas de $(-2+2i,1+i,-2)^t$ en dicha base.

Para resolver el sistema basta despejar la x, mientras que y y z pueden ser elegidas arbitrariamente:

$$\begin{aligned} x &= (i-1)\lambda - i\mu \\ y &= \lambda \\ z &= \mu \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se deduce que $\mathcal{B}=\{(i-1,1,0)^t,(-i,0,1)^t\}$ es base, porque los vectores de V son combinación de los vectores de $\mathcal{B}$ y estos son linealmente independientes (uno no es múltiplo del otro). Al igualar una combinación lineal al vector del enunciado, $\lambda=1+i$ y $\mu=-2$, por tanto, estas son sus coordenadas en la base $\mathcal{B}$.

---

3) [2 puntos] Dado el vector $(-2,-6,-1)^t\in\mathbb{R}^3$, halla su proyección ortogonal de sobre el plano $3x+5y-z=0$.

$V=$subespacio de $\mathbb{R}^3$ correspondiente al plano $\Rightarrow V^\perp$ está generado por $\vec{n}=(3,5,-1)^t$.
Si $\vec{v}=(-2,-6,-1)^t$, el vector del enunciado,

$$P_{V^\perp}(\vec{v})=\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}=\frac{-6-30+1}{3^2+5^2+1^2}\vec{n}=-\vec{n}.$$

Entonces $P_V(\vec{v})=\vec{v}-P_{V^\perp}(\vec{v})=\vec{v}+\vec{n}=(1,-1,-2)^t$.

---

4) [2 puntos] Calcula todos los valores de x para los que los vectores de $\mathbb{R}^3$

$$(x-1,1,-1)^t, \qquad (x-2,-1,1)^t \qquad \text{y} \qquad (1,1,1)^t$$

determinen un tetraedro de volumen 1.

Sumando la segunda fila a la tercera y desarrollando por ella, el determinante de la matriz formado por los vectores en columna es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & x-2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & x-2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(-2x+3).$$

Sabemos la fórmula Vol$(T) = \frac{1}{6}\big|\det(A)\big|$, que en nuestro caso da $|-2x+3|/3 = 1$. El argumento del valor absoluto puede ser positivo o negativo, lo que conduce a las ecuaciones $-2x+3=3$ y $2x-3=3$. Por tanto los valores posibles son $x=0$ y $x=3$.

---

5) [2 puntos] Dada la matriz dependiente de un parámetro $r \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & r & r \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

determina un valor de r para el que sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ y calcula, en ese caso, una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios.

Resolvemos la ecuación característica:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & r & r \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \quad \Rightarrow \quad \text{autovalores: } \lambda_1 = 1 \text{ (doble)}, \ \lambda_2 = 2.$$

Para λ_1 necesitamos dos vectores propios (independientes). Por tanto el sistema $(A-I)\vec{x} = \vec{0}$ debe tener un espacio de soluciones de dimensión dos. Equivalentemente, rg$(A-I) = 3-2 = 1$. De ello se deduce $r=0$. Con esta elección, dos posibles autovectores independientes son $\vec{v}_1 = (1,0,0)^t$ y $\vec{v}_2 = (0,1,-2)^t$.

Por otro lado, resolviendo $(A-2I)\vec{x} = \vec{0}$ (de nuevo con $r=0$), se sigue que las soluciones son el autovector $\vec{v}_3 = (0,1,-1)^t$ y sus múltiplos. De esta forma, obtenemos la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ formada por vectores propios.
