
Las instrucciones generales para los retos están en la página web de la asignatura.

Plazo y modo de entrega: Hasta las 23:59 del 8 de enero de 2022 como un fichero PDF de menos de 5 megas que se ha de subir a Moodle.

Calificación: Añade hasta 0.5 a la nota del curso.

Enunciado. Consideremos el espacio vectorial de todas las funciones continuas $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dotado con el producto escalar $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 fg$. Calcula la proyección ortogonal $p = p(x)$ de la función $\cos(\pi x)$ en el espacio W con base $\{3x^2 - 1, 35x^4 - 7\}$. Incluye en tu solución una figura realizada con ordenador que muestre superpuestas las gráficas de $\cos(\pi x)$ y de $p(x)$. Si el problema está bien resuelto, deben ser muy parecidas.

Comentarios. Hacer las cuentas manualmente es tedioso y el resultado no son números “exactos”. Es muy conveniente que uses *software* para integrar. Si no tienes nada instalado en tu ordenador, hay varias aplicaciones *on line* con este fin. No olvides mencionar lo que has usado, incluyendo el comando, si es preciso. No te limites a poner el resultado final de la proyección ortogonal. Escribe los cálculos intermedios y el método. Recuerda que las redacciones deben ser originales.

También existe mucho *software*, *on line* e instalable, para dibujar gráficas. Si te causara algún problema el tamaño del fichero (recuerda, un solo PDF de hasta 5 megas), el formato PDF o añadir la imagen, en <https://www.ilovepdf.com> hay varias aplicaciones sencillas con este fin.

Si tienes curiosidad... La proyección ortogonal es un método muy bueno para aproximaciones numéricas. Comparando $\cos(\pi x)$ con su aproximación de Taylor de grado 4, en $a = 0$, resulta que $p(x)$ aproxima mucho mejor en $[-1, 1]$ a pesar de que W es solo un subespacio de dimensión dos. En realidad, se puede probar que cambiar W por $\mathbb{R}_4[x]$ da la misma proyección ortogonal, así que el resultado que has hallado es la “mejor aproximación” (con la manera de medir inducida por el producto escalar) entre todos los polinomios de grado 4.