Las soluciones de la ecuación de Dirac para espín σ son de la forma

$$\sqrt{\frac{m}{E(\vec{p})}}u(\vec{p},\sigma)e^{-ip\cdot x} \qquad \text{y} \qquad \sqrt{\frac{m}{E(\vec{p})}}v(\vec{p},\sigma)e^{ip\cdot x}.$$

La primera solución corresponde a partículas (electrones) y la segunda a antipartículas (positrones). La normalización es

$$u^\dagger u = v^\dagger v = \frac{E(\vec{p})}{m}\delta_{\sigma\sigma'} \qquad \text{y} \qquad \overline{u}u = -\overline{v}v = \delta_{\sigma\sigma'}$$

donde la primera u o v se evalúa en $(\vec{p},\sigma)$ y la segunda en $(\vec{p},\sigma')$. También tenemos

$$\sum_\sigma u_\alpha(\vec{p},\sigma)\overline{u}_\beta(\vec{p},\sigma) = \frac{(\gamma^\mu p_\mu + m)_{\alpha\beta}}{2m} \quad \text{y} \quad \sum_\sigma v_\alpha(\vec{p},\sigma)\overline{v}_\beta(\vec{p},\sigma) = \frac{(\gamma^\mu p_\mu - m)_{\alpha\beta}}{2m}$$

donde γ^μ son las matrices de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}.$$

En la representación de Heisenberg la segunda cuantización del campo espinorial es la siguiente solución formal de la ecuación de Dirac:

$$\Psi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E(\vec{p})}}\sum_\sigma \big(e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}u(\vec{p},\sigma)b_\sigma(\vec{p}) + e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}v(\vec{p},\sigma)d_\sigma^\dagger(\vec{p})\big).$$

Aquí $b_\sigma(\vec{p})$ destruye una partícula y $d_\sigma^\dagger(\vec{p})$ crea una antipartícula. Se cumplen las relaciones

$$\{b_\sigma(\vec{p}), b_{\sigma'}^\dagger(\vec{q})\} = \{d_\sigma(\vec{p}), d_{\sigma'}^\dagger(\vec{q})\} = \delta_{\sigma\sigma'}\delta(\vec{p}-\vec{q})$$

y el resto de los anticonmutadores son 0. Por ejemplo, b_σ y d_σ anticonmutan. En analogía con el campo escalar libre se tiene

$$H = \int d^3\vec{x}\mathcal{H} = \int d^3\vec{p}E(\vec{p})\big(b_\sigma^\dagger(\vec{p})b_\sigma(\vec{p}) + d_\sigma^\dagger(\vec{p})d_\sigma(\vec{p})\big) + \infty$$

donde $b_\sigma^\dagger(\vec{p})b_\sigma(\vec{p})$ cuenta partículas y $d_\sigma^\dagger(\vec{p})d_\sigma(\vec{p})$ cuenta antipartículas. Esto significa que la energía del vacío, que debe ser mínima, ¡es infinita!