CAPÍTULO 5 TEORÍA ESPECTRAL

5.1 Autovalores y autovectores

$f: V \longrightarrow V$ Tiene asociada $A \in \mathcal{M}_n(K)$

$A \Leftrightarrow n^2$ números.

¿Existe una base en la que la matriz de f se vuelve diagonal (n números)?

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \vec{x}$$

$$\begin{aligned} x_1 &\mapsto \lambda_1 x_1 \\ x_2 &\mapsto \lambda_2 x_2 \\ &\cdots \\ x_n &\mapsto \lambda_n x_n \end{aligned}$$

Los endomorfismos tales que existe una base en la que su matriz es diagonal se dice que son <u>diagonalizables</u>

$A \in \mathcal{M}_n(K)$ diagonalizable $\longleftrightarrow$ $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ diagonalizable

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ f <u>diagonaliza</u> (matriz diagonal usando $\mathcal{B}$)

$\Longleftrightarrow f(\vec{v}_j) = \lambda_j \vec{v}_j$

¿Como hallar una base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ para la que $f(\vec{v}_j) = \lambda_j \vec{v}_j$?

Si supiéramos los λ_j se podrían calcular los $\vec{v}_j$ resolviendo $f(\vec{x}) = \lambda_j \vec{x}$

λ_j = autovalor o valor propio

v_j = autovector o vector propio $\quad f(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \quad \vec{v} \neq \vec{0}$

¿Cómo puedo calcular los autovalores?

$f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad f: K^n \longrightarrow K^n$

λ valor propio $\Longleftrightarrow$ $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$ tiene solución $\vec{x} \neq 0$

$\Longleftrightarrow (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ tiene sol. $\vec{x} \neq \vec{0}$

$\Longleftrightarrow rg(A - \lambda I) <$ nº incógnitas

$\Longleftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

Cálculo de los autovalores:

Resolver la ecuación característica

$$\det(A-\lambda I) = 0 \qquad \lambda \in K$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ entonces $\det(A-\lambda I)$ es un polinomio llamado polinomio característico.

Cálculo de los autovectores:

Para cada λ valor propio hallar las soluciones no nulas de $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. $\qquad (A-\lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

Ej $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ec. característica $|A-\lambda I|=0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad (3-\lambda)(4-\lambda)-2=0$$

$$\lambda^2-7\lambda+10=0$$

$$\lambda=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{7\pm 3}{2} \begin{cases} 2=\lambda_1 \\ 5=\lambda_2 \end{cases}$$ dos valores propios

Cada uno tiene sus autovectores

$\lambda_1=2 \quad (A-\lambda_1 I)\vec{x}=\vec{0} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}=\mu\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mu\neq 0$

Todos los autovectores para $\lambda_1=2$

$\lambda_2=5 \quad (A-\lambda_2 I)\vec{x}=\vec{0} \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}=\mu\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mu\neq 0$

Todos los vectores propios para $\lambda_2=5$

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(\vec{v}_1) = \underset{\lambda_1}{\underset{\shortparallel}{2}}\,\vec{v}_1, \quad f(\vec{v}_2) = \underset{\lambda_2}{\underset{\shortparallel}{5}}\,\vec{v}_2$

$\Rightarrow$ En la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ f se diagonaliza: su matriz es $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Recordemos la fórmula del cambio de base

$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{coord canónica} = C \ \text{coord en } \mathcal{B}$

$\boxed{D = C^{-1} A C}$ $\quad C =$ columnas = coordenadas de una base de autovectores

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Diagonalizar $\Longleftrightarrow$ encontrar una base de autovectores

Buscamos primero los autovalores y para cada uno hallamos los autovectores respectivos.

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\qquad f(\vec{x}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \vec{x}$

$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda \begin{cases} i \\ -i \end{cases}$

No hay valores propios ni vectores propios si trabajamos en $\mathbb{R}$. Pero sí los hay si $f: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$

$\lambda_1 = i \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \mu \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mu \neq 0$

$(A - \lambda I)\vec{x} = 0$

$\lambda_2 = -i \Rightarrow \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \mu \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu \neq 0$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de autovectores

$\Rightarrow f: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \quad f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$ es diagonalizable

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz $A \longleftrightarrow$ endomorfismo $K^n \longrightarrow K^n$

Cálculo autovalores $\quad |A - \lambda I| = 0 \quad$ (ec. grado n)

" autovectores $\quad (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \quad$ (sistema lineal)

Diagonalizable $\Longleftrightarrow$ Hay suficientes autovectores para formar una base de K^n.

$C^{-1} A C = D \qquad C =$ columnas los elementos de la base

$D =$ autovalores correspondientes

$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

Valores propios $|A - \lambda I| = 0$ $\qquad \lambda^2 - 4 + 3 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$

Vectores $\quad$ " $\quad (A - (-1)I)\vec{v} = \vec{0}$ $\quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$ $\quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

[Todos $\mu \vec{v}_1$, $\mu \neq 0$]

$(A - I)\vec{v} = \vec{0}$ $\quad \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$ $\quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

~~Diago~~ A es diagonalizable porque $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es base.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{= A} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow \vec{v}_1 \quad \uparrow \vec{v}_2$

<u>Proposición</u> Siempre los autovectores de autovalores distintos son linealmente independientes.

Diagonalizable $\Longleftrightarrow$ tantos autovectores como $\dim V$

En rigor $f: V \longrightarrow V$ $(V = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$

Diagonalizable $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_i I_d) = \dim V$

con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ los autovalores (distintos).

<u>Ej</u> ¿Es $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalizable?

$|A - \lambda I| = -\lambda^3 + 4\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 4) \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$

Por cada λ_j hay al menos un autovector $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_i I_d) \geq 1$

$\Rightarrow$ al menos 3 autovectores l.i (prop) $\Rightarrow$ es diagonalizable.

No todas las matrices (o endomorfismos) son diagonalizables

<u>Obs:</u> "Casi todas" las matrices son diagonalizables.

Ej $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$

$\Rightarrow$ Solo un autovalor $\lambda_1 = 2$

$(A-2I)\vec{v} = \vec{0}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\vec{v} = \vec{0}$ $\quad \vec{v} = \mu\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \mu \neq 0$

Solo un autovector y sus múltiplos pero $f: K^2 \longrightarrow K^2$ necesitaría dimensión 2

A no es diagonalizable.

Ej $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -6 & -5 & -3 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

¿Es diagonalizable?

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ -6 & -5-\lambda & -3 \\ 6 & 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & & -1 & 3 & -2 \\ \hline & -1 & 3 & -2 & \boxed{0} \\ 1 & & -1 & 2 & \\ \hline & -1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\Rightarrow$ autovalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$

$(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -6 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$

rg(matriz)$=1$

$\Rightarrow \vec{v} = \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2$

dim Ker $= 3 - $ rg $= 2$

$(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -6 & -7 & -3 \\ 6 & 6 & 2 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$

rg(matriz)$=2$

$\vec{v} = \mu_3 \vec{v}_3$

$\Rightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ base de autovectores $\Rightarrow$ A diagonalizables

__Ej__ (cont). Hallar una base en que diagonaliza.

$$(A-\lambda_1 I)\vec{v}=\vec{0} \rightarrow 4x+4y+2z=0 \quad \begin{cases} x=-\mu_1-\mu_2 \\ y=\mu_1 \\ z=2\mu_2 \end{cases} \quad \vec{x}=\mu_1\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\vec{v}_1}+\mu_2\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}$$

$$(A-\lambda_2 I)\vec{v}=\vec{0} \qquad \begin{pmatrix}3&4&2\\-6&-7&-3\\6&6&2\end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}3&4&2\\0&1&1\\\cancel{0}&\cancel{-2}&\cancel{-2}\end{pmatrix} \quad \begin{cases} x=2\mu \\ y=-3\mu \\ z=3\mu \end{cases} \quad \vec{x}=\mu\underbrace{\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}}_{\vec{v}_3} \qquad \mathcal{B}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$$

__Ej__ $A=\begin{pmatrix}5&3&1\\-6&-3&-1\\6&4&2\end{pmatrix}$ $\quad |A-\lambda I|=-(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ como antes

$$A-\lambda_1 I=\begin{pmatrix}4&3&1\\-6&-4&-1\\6&4&1\end{pmatrix}$$

$\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda_1 I)=3-rg=1 \Rightarrow \vec{v}_1$

$\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda_2 I)=3-rg=1 \Rightarrow \vec{v}_2$

$\Rightarrow$ No diagonalizable

$f(\vec{x}) = A\vec{x}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1+2i & -1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix}$ ¿Es diagonalizable? ¿En qué base?

$$\begin{vmatrix} 1+2i-\lambda & -1 \\ -2 & 1-i-\lambda \end{vmatrix} = (1+2i-\lambda)(1-i-\lambda) - 2$$

$$= (1+2i)(1-i) - (2+i)\lambda + \lambda^2 - 2$$

$$= 3+i - (2+i)\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - (2+i)\lambda + 1 + i$$

$$|A - \lambda I| = 0 \implies \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 1+i$$

$\downarrow \vec{v}_1$ $\quad \downarrow \vec{v}_2$ es diagonalizable

$\lambda_1 = 1 \to (A - I)\vec{v} = \vec{0} \quad \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ -2 & -i \end{pmatrix}\vec{v} = \vec{0} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1+i \to (A - (1+i)I)\vec{v} = 0 \quad \begin{pmatrix} i & -1 \\ -2 & -2i \end{pmatrix}\vec{v} = \vec{0} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Ej Decidir si son diagonalizables

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 \Rightarrow \text{autovalor } \lambda = 0$$

$A\vec{v} = \vec{0}$ $\quad$ dim Ker $= 3-1 = 2$

↳ solo dos autovectores lin. indep.

$\Rightarrow$ No diagonalizable

$$|B-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2+\lambda) = -\lambda^2(\lambda+1)$$

$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = -1$

$B\vec{v} = \vec{0}$ $\quad$ dim Ker $= 3-1 = 2$

↳ dos v. propios $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

$\lambda_2 = -1 \rightarrow$ otro autovector $\vec{v}_3$

$\Rightarrow$ B es diagonalizable

$$\underset{B-\lambda_2 I}{\underset{\parallel}{|B+I|}} = 0 \Rightarrow (B+I)\vec{v} = \vec{0} \text{ tienesolución } \vec{v} \neq \vec{0}$$

$\Rightarrow$ existe un $\vec{v}_3$

$\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ no ortogonales $\xrightarrow{G-S}$ $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ ortogonales

Fórmula G-S $= \vec{v}_j - P_W(\vec{v}_j)$

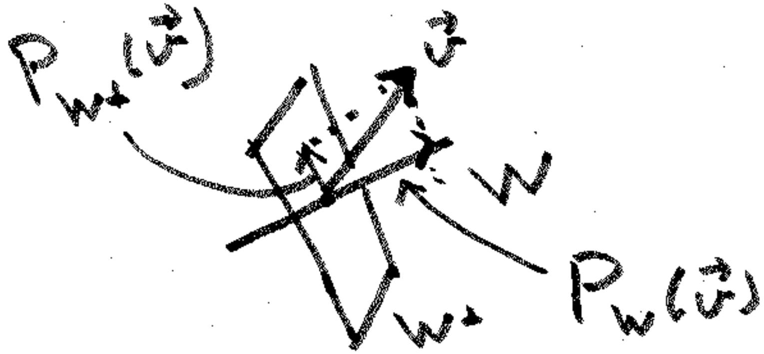
Ortogonalizar

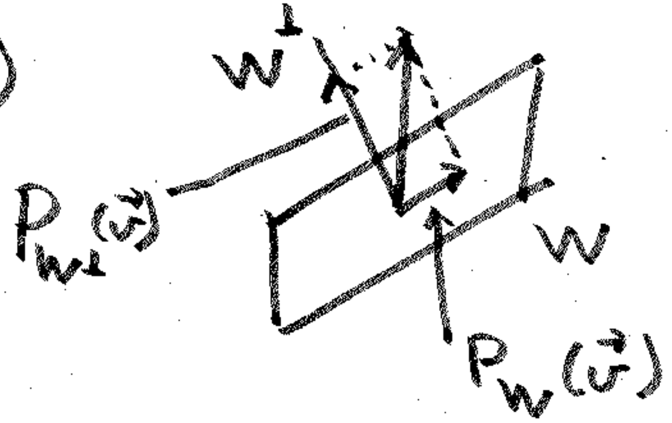
$\vec{v} \in V$ $\quad P_W(\vec{v}) \in W$ Proyección ortogonal

---

Si calculamos con una base ortogonal las cuentas serán muy parecidas

$$\vec{v} = P_W(\vec{v}) + P_{W^\perp}(\vec{v})$$





$W^\perp = \{\vec{x} \in V : \vec{x} \cdot \vec{w} = 0$ con $\vec{w} \in W\}$

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0\}$$

$= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} \cdot \vec{v} = \vec{0}\}$ con $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$=$ perpendiculares a $\vec{v}$

$\Rightarrow V^\perp = \mathcal{L}(\{\vec{v}\}) \Leftrightarrow$ Los perpendicular a V son $\vec{v}$ y sus múltiplos

$$V \longrightarrow \text{base } \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \longrightarrow \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$$

$$V = \mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}) = \mathcal{L}(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\})$$

$$\underbrace{\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}}_{\text{base } \mathbb{R}^5} \xrightarrow{GS} \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \underbrace{\vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5}_{\text{ortogonales a } \vec{u}_1 \text{ y } \vec{u}_2}\}$$

$$V^{\perp} = \mathcal{L}(\{\vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5\}) \longrightarrow \text{ecuaciones}$$

POR FAVOR RELLENAD LAS ENCUESTA

¡Por favor!

5.2 El teorema espectral [No está en la guía; no entra en examen]

(el que tenga curiosidad que mire los apuntes)

$A = A^{\dagger}$ $\quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermítica

$\quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica real

Teorema: $A = A^{\dagger} \Rightarrow$ los autovalores son reales, A es diagonalizable y siempre se puede diagonalizar en una base ortonormal.

Ej $A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$ $\quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 12 \\ 12 & 16-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda$

$\lambda = 0 \rightarrow A\vec{v} = \vec{0} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\qquad \lambda = 25 \quad \begin{pmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ ortonormal

5.3 Algunas aplicaciones

[No está en la guía
Sí es material de examen]

$$\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n \quad n=0,1,2,\dots$$

Nos dan un $\vec{x}_0 \in K^n$, $A \in \mathcal{M}_n(K)$ queremos una fórmula para $\vec{x}_n$.

$\vec{x}_1 = A\vec{x}_0$, $\vec{x}_2 = A\vec{x}_1 = A^2\vec{x}_0$, $\vec{x}_3 = A\vec{x}_2 = A^3\vec{x}_0$

En general $\vec{x}_n = A^n\vec{x}_0$

A diagonalizable $C^{-1}AC = D$ $C \rightarrow$ columnas autovectores

$A = CDC^{-1}$ $A^2 = CD\cancel{C^{-1}}\cancel{C}DC^{-1} = CD^2C^{-1}$

$A^n = CD\cancel{C^{-1}}\cancel{C}DC^{-1} \cdots \cancel{C}DC^{-1} = CD^nC^{-1}$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^n \end{pmatrix}$$

Prop $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalizable

$C \to$ columnas base de autovectores de A $\quad C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$D \to$ matriz diagonal (autovalores respectivos)

La solución de $\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$ es

$$\vec{x}_n = C D^n C^{-1} \vec{x}_0$$

Ej $\vec{x}_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{= A} \vec{x}_n \qquad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda I| = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$
$$= (5-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = 5$

$$\lambda_1 = 2 \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 5 \longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_n = C \begin{pmatrix} 2^n & & \\ & 3^n & \\ & & 5^n \end{pmatrix} C^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_0 =} = \boxed{\begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n \\ 2^n - 3^n \\ -5^n \end{pmatrix}} \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Ej $\quad \vec{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} -11 & 6 \\ -20 & 11 \end{pmatrix} \vec{x}_n \qquad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -11-\lambda & 6 \\ -20 & 11-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 121 + 120 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

$$A = C \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} C^{-1} \qquad A^n = C \begin{pmatrix} (-1)^n & \\ & 1 \end{pmatrix} C^{-1}$$

$\vec{x}_n = A^n \vec{x}_0$

n par $\Rightarrow A^n = I \Rightarrow \vec{x}_n = \vec{x}_0$

n impar $\Rightarrow A^n = A \Rightarrow \vec{x}_n = A\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} -11a + 6b \\ -20a + 11b \end{pmatrix}$

$$\vec{x}_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1}}_{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6(-1)^n - 5)a + 3(1 - (-1)^n)b \\ 10((-1)^n - 1)a + (6 - 5(-1)^n)b \end{pmatrix}$$

Ej $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad F_0 = 0 \qquad F_1 = 1$

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

$$\vec{x}_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A\vec{x}_n$$

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0, \quad \lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda = \lambda_+ \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda_+ & 1 \\ 1 & -\lambda_+ \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_+ \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \lambda_- \Rightarrow \text{- - - - - - -} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_- \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_n = \begin{pmatrix} \lambda_+ & \lambda_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_+^n & 0 \\ 0 & \lambda_-^n \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_+ & \lambda_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_- \\ -1 & \lambda_+ \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{calculos}}}{=} \begin{pmatrix} \cdots \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_+^n - \lambda_-^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right) \qquad \begin{array}{l} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \end{array}$$

n grande $\quad F_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$n = 20 \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{20} = 6765.000029\ldots, \quad F_{20} = 6765$

Veamos otra aplicaciones de la diagonalización a ecuaciones diferenciales.

Queremos resolver la ecuación diferencial

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) \qquad x(0) = \vec{x}_0$$

$$\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n \; (\text{o } \mathbb{C}^n) \qquad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \; (\text{o } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$$

Prop $A \rightarrow$ diagonalizable
$C \rightarrow$ columnas base de autovectores
$D \rightarrow$ diagonal autovalores respectivos $= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

La solución de la ec. dif. es

$$\boxed{\vec{x}(t) = C \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} C^{-1} \vec{x}_0}$$

$\underline{E_j}$ Resolver $\begin{cases} x' = -11x + 6y \\ y' = -20x + 11y \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\vec{x}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -11 & 6 \\ -20 & 11 \end{pmatrix}}_{= A} \vec{x}$ $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Habíamos visto $|A - \lambda I| = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{v}_1 \\ \lambda_2 = 1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{v}_2 \end{cases}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1}}_{= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{-t} - 2e^{t} \\ 5e^{-t} - 4e^{t} \end{pmatrix}}$$

Comprobación

$x' = -11x + 6y$

$x' = -3e^{-t} - 2e^{t}$

$-11(3e^{-t} - 2e^{t}) + 6(5e^{-t} - 4e^{t})$

Ej Resolver $\vec{x}' = A\vec{x}$ con $A = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

$|A - \lambda I| = 0$ $\begin{vmatrix} 7-\lambda & -10 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$

$\lambda_1 = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$ $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $3x - 6y = 0$

$\downarrow y = \mu \Rightarrow x = 2\mu$

$\lambda_2 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^{2t} & 5e^{t} \\ e^{2t} & 3e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} + 5e^{t} \\ e^{2t} + 3e^{t} \end{pmatrix}$$

Ej Resolver el oscilador armónico

$$y''(t) + 4y(t) = 0 \qquad y(0) = 3 \quad y'(0) = 2$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} y''(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A\vec{x}(t)$$

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -4 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -2i \\ \lambda_2 = 2i \end{cases}$$

$$\lambda_1 = -2i \rightarrow \begin{pmatrix} 2i & -4 \\ 1 & 2i \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2i \rightarrow \begin{pmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2it} & 0 \\ 0 & e^{2it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -2i\,e^{-2it} & 2i\,e^{2it} \\ e^{-2it} & e^{2it} \end{pmatrix} \frac{i}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ -1 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{— — —} \quad \text{——} \\ \frac{3+i}{2} e^{-2it} + \frac{3-i}{2} e^{2it} \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \frac{3+i}{2} e^{-2it} + \frac{3-i}{2} e^{2it} \qquad e^{\pm 2it} = \cos(2t) \pm i\,\mathrm{sen}(2t)$$

$$\boxed{y(t) = 3\cos(2t) + \mathrm{sen}(2t)}$$

$$z = a + bi \qquad z + \bar{z} = 2a$$

$$y(t) = \mathrm{Re}\left((3+i)e^{-2it}\right) = \mathrm{Re}\left((3+i)(\cos \quad i\,\mathrm{sen})\right)$$

~~AVISOS~~ PLAN PARA EL RESTO DEL CURSO:

- Hoy y mañana → Sección 5.4
- Martes → clase de problemas
- Jueves → Ejercicios de la sección 5.4
- Viernes → NO HABRÁ CLASE DE ÁLGEBRA, EN SU LUGAR SERÁ DE ANÁLISIS

5.4 La forma canónica de Jordan

¿Qué podemos hacer con las matrices no diagonalizables?

Todas "casi" se diagonalizan.

Solo haremos ejemplos en los casos de dimensión 2 y 3.

<u>Teorema</u> $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ siempre existe una base de $\mathbb{C}^2$ en la que A adquiere una de las siguientes formas

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

diagonalizable

dos autovectores l.i.

no diagonalizable

solo un autovector y sus múltiplos

Teorema $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ siempre existe una base de $\mathbb{C}^3$ en la que A aquiere una de las siguientes formas

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ o bien } \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}}_{\text{no diagonalizable}}$$

diagonalizable
3 autovectores l.i

2 autovectores l.i.

1 autovector y sus múltiplos

Se dice que estas formas diagonales o casi diagonales son la <u>forma canónica de Jordan</u> de la matriz.

En general el teorema de Jordan afirma que para cualquier $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ existe una base de Jordan en la que adquiere la forma

$$\begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ O & O & \cdots & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \quad \text{con } J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

Celdas de Jordan

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right)$$

Hallar la forma canónica de Jordan para $n=2,3$ es fácil $\longrightarrow$ contar autovectores

Hallar la base (de Jordan) en la que se obtiene la forma canónica $\longrightarrow$ más complicado

Ej $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ Hallar la forma canónica de Jordan

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ -1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+4\lambda+4 = (\lambda+2)^2 \qquad \lambda_1 = -2$$

$$(A_1+2I)\vec{v} = \vec{0} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\vec{v} = \vec{0} \qquad \vec{v} = \mu\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mu \neq 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

Ej $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ¿forma canónica de Jordan?

$|A_2 - \lambda I| = (1-\lambda)^2(-\lambda-1)$ $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$

$\lambda_1 = 1$ $(A_2 - I)\vec{v} = \vec{0}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}\vec{v} = \vec{0}$ $rg(A) = 2 \Rightarrow \dim Ker = 3 - 2 = 1$

$\vec{v} = \mu \cdot$ cierto vector

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow 1$ autovector (y sus múltiplos)

$\lambda_2 = -1$ $(A_2 + I)\vec{v} = \vec{0}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}\vec{v} = \vec{0}$ $\vec{v} = \mu \cdot$ cierto vector

$\lambda_2 = -1 \Rightarrow 1$ autovector (y sus múltiplos)

$\Rightarrow$ 2 autovectores $\boxed{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)}$

Ej $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ¿Forma canónica de Jordan?

$$|A_3 - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2$ (solo un autovalor)

$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$ $\quad rg(A_3 - 2I) = 2$

$\Rightarrow 3 - 2 = 1$ autovector l.i.

$\rightarrow$ Forma canónica de Jordan $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ej $A_4 = \begin{pmatrix} -4 & 9 & 3 \\ -4 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ¿Forma canónica de Jordan?

$$|A_4 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 9 & 3 \\ -4 & 8-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & 9 \\ -4 & 8-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (2-\lambda)^3$$

$(A_4 - 2I)\vec{v} = \vec{0}$ $\begin{pmatrix} -6 & 9 & 3 \\ -4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\vec{v} = \vec{0}$ $rg(A_4 - 2I) = 1$

$3-1=2$ vectores propios l.i.

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = J$$

Tma Jordan $\exists C$ $C^{-1} A_4 C = J$

A diagonalizable $C^{-1} A C = D$ $C \rightarrow$ columnas autovectores

¿Cómo calcular la base de Jordan (la que da las columnas de la matriz C de cambio de base) si la matriz de partida no es diagonalizable?

$A \longrightarrow J$ = forma canónica de Jordan de A

$\exists C: \; C^{-1}AC = J$ columnas de $C \to$ base de Jordan (en la que A pasa a ser J)

Recordemos: J diagonal $\Leftrightarrow$ base de Jordan = autovectores (l.i.)

Casos no diagonalizables ($n=2, 3$)

① $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

Prop. Una base de Jordan se puede calcular con:

(1) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ donde $(A-\lambda_1 I)\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ y $\vec{v}_1 = (A-\lambda_1 I)\vec{v}_2$

(2) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ donde $(A-\lambda_1 I)\vec{v}_2 \neq \vec{0}$, $(A-\lambda_1 I)^2\vec{v}_2 = \vec{0}$

$\vec{v}_1 = (A-\lambda_1 I)\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ autovector no múltiplo de $\vec{v}_1$

(3) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ donde $(A-\lambda_1 I)^2\vec{v}_3 \neq \vec{0}$, $\vec{v}_2 = (A-\lambda_1 I)\vec{v}_3$,

$\vec{v}_1 = (A-\lambda_1 I)\vec{v}_2$.

<u>Ej</u> $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \overset{\text{antes}}{\rightsquigarrow} J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad \lambda_1 = -2$ $\qquad$ Base Jordan

$(A_1 - \lambda_1 I)\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ $\qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ $\qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\vec{v}_1 = (A_1 - \lambda_1 I)\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Comprobación: $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}}_{C^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}}_{A_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{J}$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Ej $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Canónica de Jordan}]{\text{forma}} J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

$(A_2 - I)\vec{v}_2 \neq \vec{0} \qquad (A_2 - I)^2 \vec{v}_2 = \vec{0}$

$A_2 - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \overset{(A_2 - I)^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8 & 8 & 4 \\ 8 & -8 & -4 \end{pmatrix}}$

por ejemplo $\boxed{\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}} \qquad (A_2 - I)\vec{v}_2 \neq \vec{0} \qquad (A_2 - I)^2 \vec{v}_2 = \vec{0}$

$\vec{v}_1 = (A_2 - I)\vec{v}_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$(A_2 - \underset{\lambda_2}{(-1)} I)\vec{v}_3 = \vec{0} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \vec{v}_3 = \vec{0} \qquad \boxed{\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & +1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} A_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = J$

Ej $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 2$

$(A_3 - 2I)^2 \vec{v}_3 \neq \vec{0}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{(A_3-2I)^2} = (A_3-2I)^2$

$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = (A_3 - 2I)\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_1 = (A_3 - 2I)\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (una) base de Jordan

---

otra elección

$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = (A_3 - 2I)\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_1 = (A_3 - 2I)\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ otra base de Jordan

¿Cuál es la idea tras la proposición?

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \bigcirc & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Esta matriz cumple

$$(J_n(\lambda) - \lambda I)^n = \bigcirc$$

$$(J_n(\lambda) - \lambda I)^{n-1} \neq \bigcirc$$

$n=2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_n(\lambda)\,\vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \vec{e}_n + \vec{e}_{n-1}$$

En general $J_n(\lambda)\vec{e}_i = \lambda \vec{e}_i + \vec{e}_{i-1}$

$$\Rightarrow \vec{e}_{i-1} = (J_n(\lambda) - \lambda I)\,\vec{e}_i$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} J_2(\lambda_1) & 0 \\ \hline \bigcirc & J_1(\lambda_2) \end{array}\right)$$

Ej $A_4 = \begin{pmatrix} -4 & 9 & 3 \\ -4 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow J = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

$(A_4 - 2I)\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ $\qquad \underbrace{(A_4 - 2I)^2}_{= O} \vec{v}_2 = \vec{0}$

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_1 = (A_4 - 2I)\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(A_4 - 2I)\vec{v}_3 = \vec{0} \qquad \vec{v}_3$ l.i. (no múltiplo) de $\vec{v}_1 \rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Por favor rellenad las encuestas

Ej $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ ¿Base de Jordan?

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad -(\lambda+2)^2(\lambda+1) = 0 \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

$A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $rg = 2 \downarrow \dim Ker = 1$ $\rightarrow$ 1 autovector (y sus múltiplos)

$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$ (el resto múltiplos)

$(A+2I)^2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(A+2I)^2 \vec{v}_2 = \vec{0}$

$(A+2I)\vec{v}_2 \neq \vec{0}$

$\boxed{\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$$\boxed{\vec{v}_1 = (A+2I)\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicios hoja 5

11 a) $\begin{cases} x' = -3x - 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$ $\quad x(0)=1 \quad y(0)=0$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = CDC^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C e^{Dt} C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 & \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 1 & \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \underbrace{\underset{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = \boxed{\begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{t} \\ -e^{-t} + e^{t} \end{pmatrix}}$$

10) $\vec{x}_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \vec{x}_n \qquad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$|A - \lambda I| = -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$ → $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$

$\lambda_1 = -1 \qquad \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1 \qquad \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 = 2 \rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}_n = \underset{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{C}} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} C^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 + 3 \cdot 2^n \\ (-1)^n - 1 - 2^n \\ (-1)^{n+1} \end{pmatrix}}$$

8) $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ $\quad \|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ $\quad A = I_n - \vec{v}\,\vec{v}^t$

- A es simétrica $\quad (I - \vec{v}\vec{v}^t)^t = I - (\vec{v}\vec{v}^t)^t = \cancel{\ }$
$= I - (\vec{v}^t)^t\,\vec{v}^t = A$

- $V = \mathcal{L}(\{\vec{v}\})$ (múltiplos de $\vec{v}$)

$\vec{w} \in V,\ \vec{w} \in V^\perp \Rightarrow \vec{w}$ es autovector. $(\vec{w} \neq \vec{0})$

$\vec{w} \in V \Rightarrow \vec{w} = \mu\vec{v}$ $\quad A\vec{w} = \mu\vec{v} - \mu\,\vec{v}\underbrace{\vec{v}^t\vec{v}}_{\|\vec{v}\|^2} = \mu\vec{v} - 2\mu\vec{v} = -\vec{w}$

$\hookrightarrow A\vec{w} = -\vec{w}$ autovect con $\lambda = -1$

$\vec{w} \in V^\perp \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{w} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}^t\vec{w} = 0$

$A\vec{w} = \vec{w} - \vec{v}\,\vec{v}^t\vec{w} = \vec{w}$

$\hookrightarrow A\vec{w} = \vec{w}$ autovect con $\lambda = 1$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

5) a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ Diagonalizar en <u>base ortogonal</u>

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-4) \left\langle \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 4 \end{array} \right.$$

$$\lambda_2 = 4 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \qquad -x+y+0z=0$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ortogonales

1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1 \longrightarrow \vec{v} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mu \neq 0$

$\lambda = 1 \longrightarrow \vec{v} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2 \longrightarrow \vec{v} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$