Capítulo 2 Espacios vectoriales

2.1 Definición y ejemplos

Idea: un espacio vectorial V es un conjunto de cosas, que llamaremos vectores, que se pueden multiplicar por números y sumar entre sí

En breve $\vec{u}, \vec{v} \in V \Rightarrow \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in V$

λ, μ = números

$\vec{u}, \vec{v}$ = vectores

$\mathbb{R}^n$ es espacio vectorial números $= \mathbb{R}$

$\mathbb{C}^n$ " " " números $= \mathbb{C}$

<u>Def</u> Sea V un conjunto, K un <u>cuerpo</u> y dos operaciones $+: V \times V \longrightarrow V$, $\cdot: K \times V \longrightarrow V$. Se dice que V es un <u>espacio vectorial sobre K</u> si $(V,+)$ es <u>grupo abeliano</u> y para $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $a, b \in K$ se cumple

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u} \qquad (a+b)\cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$$

$$a \cdot (b \cdot \vec{u}) = (a \cdot b) \cdot \vec{u} \qquad a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$$

<u>Notación</u> elementos de $V \to$ vectores

" de $K \to$ escalares

- $\cdot$ Se suele omitir.

K cuerpo si se puede $+, -, \times$ y $\div$ (salvo por cero)
en este curso $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$(V,+)$ grupo abeliano si se puede ● $+$ y $-$

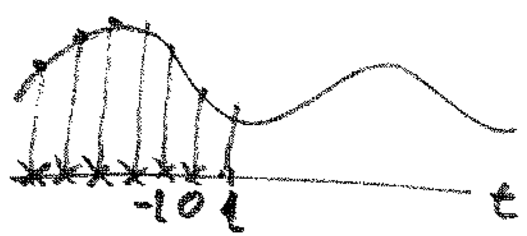
$\mathbb{C}^n$ " " " números $= \mathbb{R}$

" $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ (notación para distinguirlo del habitual)

$\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ es espacio vectorial números $= \mathbb{R}$

$f: \overbrace{X}^{m \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ " " " números $= \mathbb{R}$

$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ " " " " "



¿Cuál es la definición de verdad de espacio vectorial?

$V = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} \}$

Es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

$V = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{C} \}$ esp. vect. sobre $\mathbb{C}$

$\mathbb{R}^n$ $\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad f : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(1) = x_1 \quad f(2) = x_2, \dots$

$\mathbb{R}^n$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

$\mathbb{C}^n$ " " " " $\mathbb{C}$

$\neq$ $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ " " " " $\mathbb{R}$

$\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ " " " $\mathbb{R}$

Damos por hecho que

K^n, $\mathcal{M}_{mn}(K)$, $\{f : X \longrightarrow K\}$

son espacios vectoriales sobre $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

W es un <u>subespacio vectorial</u> de V

si $W \subset V$ y W es espacio vectorial con las mismas operaciones y el mismo K que en V.

<u>Proposición</u> V = espacio vectorial sobre K, $W \subset V$

W es subespacio vectorial $\Longleftrightarrow$ para todo $\lambda, \mu \in K$ y $\vec{u}, \vec{v} \in W$ se tiene $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in W$.

Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

$V \subset \mathbb{R}^n$ $\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\quad \vec{u}, \vec{v} \in V$ $\quad A\vec{v} = A\vec{u} = \vec{0}$

$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \overset{(?)}{\in} V$ $\qquad A(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda \underbrace{A\vec{u}}_{=\vec{0}} + \mu \underbrace{A\vec{v}}_{=\vec{0}} = 0$

$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{b}\}$ $\qquad \vec{b} \neq \vec{0}$

No es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. $\qquad V \subset \mathbb{R}^n$

$\vec{u} \in V$ $\quad \lambda = 7$ $\qquad A\vec{u} = \vec{b}$

$A(7\vec{u}) = 7\vec{b} \neq \vec{b} \Rightarrow 7\vec{u} \notin V$

$7\vec{u} + 0\vec{v} \notin V$

$\mathbb{R}[x]$ = polinomios en la variable x con coef. $\in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}[x] \subset \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$

$P, Q \in \mathbb{R}[x] \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}[x]$

$\Rightarrow \mathbb{R}[x]$ ~~son~~ es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

$\mathbb{C}[x]$ " " " " $\mathbb{C}$

$V = \{P \in \mathbb{R}[x]$ de grado exactamente $3\}$

no es e. v. sobre $\mathbb{R}$

$P = 2x^3 + 1 \qquad Q = 1 - x^3 \qquad 1 \cdot P + 2 \cdot Q = 3$ no es pol. de grado 3

$P + 2Q \notin V$

$\mathbb{R}_n[x] = \{ P \in \mathbb{R}[x]$ de grado a lo más $n \}$

es e.v. sobre $\mathbb{R}$ $\qquad \lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_n[x]$

$V = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A = A^t \}$ (matrices simétricas)

$A_1, A_2 \in V \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\Big\}$ $\lambda A_1 + \mu A_2 \overset{(?)}{\in} V$

$\hookrightarrow A_1^t = A_1,\ A_2 = A_2^t$

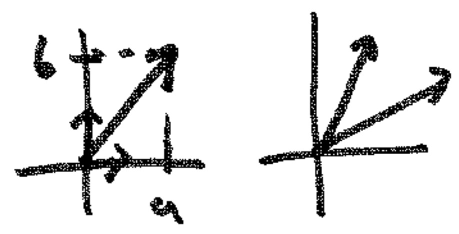
$(\lambda A_1 + \mu A_2)^t = \lambda A_1^t + \mu A_2^t$

$= \lambda A_1 + \mu A_2$

V es e.v. sobre $\mathbb{R}$

2.2 Bases y dimensión

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



Se dice que $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ son <u>linealmente</u> <u>independientes</u> si la única solución de $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$ con $\lambda_j \in \mathbb{R}$ es $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Lo contrario es lin. dependientes
$\Longleftrightarrow$ algún $\vec{v}_j$ se despeja en términos de los otros.

Combinación lineal $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$

$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ $\vec{v}_3=\begin{pmatrix}-1\\4\\-7\end{pmatrix}$ ¿Son l.i.?

$\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\lambda_3\vec{v}_3=\vec{0}$ $\vec{\lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}$ $A=\left(\vec{v}_1\middle|\vec{v}_2\middle|\vec{v}_3\right)$

$\Updownarrow$

$A\vec{\lambda}=\vec{0}$ $f_1\Leftrightarrow f_2$ $\begin{pmatrix}1&0&4\\2&3&-1\\-1&1&-7\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&4\\0&3&-9\\0&1&-3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&4\\0&3&-9\\0&0&0\end{pmatrix}$

$rg(A)=2 \Rightarrow$ inf. sol. $\Rightarrow$ lin. dependientes

---

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ l. d. $\Longleftrightarrow$ uno es múltiplo de otro

$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+2i \\ i-1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 3i-1 \\ i-2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \frac{1+2i}{1+i}\,\vec{v}_1$$

$$\Longrightarrow \text{l. d.} \qquad \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \vec{0} \qquad \lambda_1 = \frac{1+2i}{1+i} \quad \lambda_2 = -1$$

$$P_1 = 1+x+x^2, \quad P_2 = 3+5x+x^2, \quad P_3 = 7-x^2+x^3 \qquad \mathbb{R}[x]$$

¿Son l. i.? $\quad \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$

$$\underbrace{(\lambda_1+3\lambda_2+7\lambda_3)}_{=0} + \underbrace{(\lambda_1+5\lambda_2)}_{=0}x + \underbrace{(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)}_{=0}x^2 + \underbrace{\lambda_3}_{=0}x^3 = 0$$

$$A\vec{\lambda} = \vec{0}, \quad \vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rg}(A) = 3 \;\Longrightarrow\; \text{son l. i.}$$

$\mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}) = \{$ todas las comb. lineales de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$

$= \{\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$ con $\lambda_j \in K\}$

$\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subset W$ espacio vectorial

son sistema de generadores (generan)

si $\mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}) = W$

$V =$ espacio vectorial $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$

Decimos que $\mathcal{B}$ es <u>base</u> de V si es sistema de generadores y los $\vec{v}_j$ son linealmente independientes

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $\mathbb{R}^2$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\,\vec{e_1} + y\,\vec{e_2}, \quad \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

sistema de generadores

$\lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

En general se tiene la <u>base canónica</u> de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2} + \dots + x_n \vec{e_n}$$

<u>Prop.</u> Todas las bases de un espacio vectorial V tienen el mismo número de elementos. Tal número se llama dimensión de V y se indica con $\dim V$.

En este curso solo consideraremos $\dim V$ finita.

<u>Corolario</u> $V = \{\vec{x} \in K^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$ $\quad A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$

Se cumple $\dim V = n - rg(A)$.

$\dim \mathbb{R}^n = n \qquad \dim \mathbb{C}^n = n$

$\mathbb{R}_n[x] = \{\text{pol de grado} \leq n\}$

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es base

$\Rightarrow \dim \mathbb{R}_n[x] = n+1 \qquad \dim \mathbb{C}_n[x] = n+1$

$\dim \mathcal{M}_{m\times n}(K) = mn$

<u>Prop.</u> V = espacio vectorial con $\dim V = n$

Cualesquiera n vectores linealmente independientes forman una base.

<u>Ej.</u> Hallar una base y la dimensión de

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^3 : A\vec{x} = \vec{0}\} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5+i \\ 3 & 2i & 4+2i \\ 4 & -1-4i & 3+3i \end{pmatrix}$$

$$\dim V = n - rg(A) = 3 - rg(A)$$

antes de empezar $f_1 \to 3f_1$ $\quad f_2 \to 2f_2$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 15+3i \\ 0 & -3+4i & -7+i \\ 0 & -3+4i & -7+i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad rg(A)=2$$

$$\mathcal{B} = \{ \vec{v}_1 \}$$

$$\dim V = 3 - rg(A) = 1$$

$$\vec{v}_1 \in V - \{\vec{0}\} \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 6x + 3y + (15+3i)z = 0 \\ (-3+4i)y + (-7+i)z = 0 \end{cases}$$

$$\frac{-7+i}{-3+4i} = \frac{(-7+i)(-3-4i)}{25} = \frac{21+4+(-3+28)i}{25} = 1+i$$

$$z = 1 \qquad y = -1-i \qquad x = -2 \qquad \mathcal{B} = \{ (-2, -1-i, 1)^t \}$$

Ej $W_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2-x_3+2x_4=0 \end{array} \right\}$

$W_2 = \mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\})$ con $\begin{array}{l} \vec{v}_1 = (3,1,-2,-2)^t \\ \vec{v}_2 = (0,1,-1,0)^t \end{array}$

¿Son iguales W_1 y W_2?

$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_1 \in W_1 \\ \vec{v}_2 \in W_1 \end{array}\right.$ porque $\begin{array}{l} 3+1+(-2)+(-2)=0 \\ 3-1-(-2)+2(-2)=0 \end{array}$

$\longrightarrow W_2 \subset W_1$ $\qquad$ $\dim W_1 = \dim W_2$

$\longrightarrow W_1 = W_2$

$\dim W_2 = 2$ porque $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son l.i.

$$\left.\begin{array}{l} \dim W_1 = n - rg(A) = 4 - rg(A) \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} & \\ 0 & \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \end{array}\right\} \dim W_1 = 2$$

<u>Ej</u> $W = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda - \mu & 2\lambda \\ \mu & \lambda + \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{10 Noviembre} \\ 1^{er} \text{ parcial}\end{array}}$

Demostrar que es subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y hallar dim W.

$$\lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= A_1} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{= A_2}$$

$\mathcal{B} = \{A_1, A_2\}$

$\dim W = 2$

$W = \mathcal{L}(A_1, A_2)$ $\qquad \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2$

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ Base de V

$\vec{v} \in V \Rightarrow \vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n$

coordenadas de $\vec{v}$ en la base $\mathcal{B}$

Se pueden considerar los vectores siempre en K^n (en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$) identificándolos con sus coordenadas..

$$\vec{v} \in V \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

$\mathbb{R}_2[x] = \{$ polinomios de grado $\leq 2\}$

$\dim \mathbb{R}_2[x] = 3 \qquad a + bx + cx^2 \qquad \{1, x, x^2\}$

$\mathcal{B} = \{1,\ x+1,\ (x+1)^2\}$ Comprobar que es base de $\mathbb{R}_2[x]$

3 vectores $= \dim \mathbb{R}_2[x]$

Basta ver que son l. i.

$$\lambda_1 1 + \lambda_2 (x+1) + \lambda_3 (x+1)^2 = 0$$

$$\underbrace{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}_{=0} + \underbrace{(\lambda_2+2\lambda_3)}_{=0}x + \underbrace{\lambda_3}_{=0} x^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

$\Longrightarrow \mathcal{B}$ es base

Hallar las coordenadas de

$P = 7 + 4x + x^2$

$$\begin{aligned} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= 7 \\ \lambda_2+2\lambda_3 &= 4 \\ \lambda_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= 4 \\ \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= 1 \end{aligned}$$

$Q = 1 + (x+1) + (x+1)^2$ coordenadas $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = 7 + 4x + x^2$ " $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\parallel$

$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v_1} + \cdots + \lambda_n \vec{v_n}$ $\rightarrow$ Dados $\vec{v_j}$ y $\vec{v}$

$\xrightarrow[\text{sistema}]{}$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ coordenadas

2.3 Aplicaciones lineales

$f : V \longrightarrow W$ es aplicación lineal

si preserva las combinaciones lineales

$$f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

<u>Prop</u> ~~Sea~~ $f: K^n \longrightarrow K^m$ aplicación lineal

$\Rightarrow$ $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ $\quad A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

Las columnas de A son los vectores $f(\vec{e_j})$ con $\{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ la base canónica de K^n.

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \vec{x}$

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$K^{n_1} \xrightarrow{g} K^{n_2} \xrightarrow{f} K^{n_3} \qquad f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

$$g(x) = B\vec{x}$$

$$(f \circ g)(\vec{x}) = f(g(\vec{x})) = A(B\vec{x})$$
$$= AB\vec{x}$$

$$f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \qquad f(P) = (x-1)P' + P$$

Comprobar que f es apl lin.

$$f(\lambda P + \mu Q) = (x-1)(\lambda P + \mu Q)' + (\lambda P + \mu Q)$$
$$= \lambda\left((x-1)P' + P\right) + \mu\left((x-1)Q' + Q\right)$$
$$= \lambda f(P) + \mu f(Q)$$

$f(P) = (x-1)P' + P \qquad \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$

Fijada una base de $\mathbb{R}_2[x]$ Polinomios $\Leftrightarrow$ vectores de $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\} \qquad P = a + bx + cx^2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Si estamos en $\mathbb{R}^3$ las columnas de la matriz de la apl lineal son $f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), f(\vec{e_3})$

En general, dada una base $\mathcal{B} = \{\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n}\}$ la matriz cuyas columnas son las coordenadas de $f(\vec{b_1}), \dots, f(\vec{b_n})$ en cierta base del espacio imagen se llama la <u>matriz de la aplicación lineal</u>

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ \updownarrow & \mathcal{B}=\{1,x,x^2\} & \updownarrow \\ \mathbb{R}^3 & & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

$f(P)=(x-1)P'+P$

Hallemos la matriz de f usando la base $\mathcal{B}$

A = matriz $\leftarrow$ columnas dadas por las coordenadas de $f(1)$, $f(x)$, $f(x^2)$

$$f(1)=1 \longrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$f(x)=-1+2x \longrightarrow \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$f(x^2)=-2x+3x^2 \longrightarrow \begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&-2\\0&0&3\end{pmatrix}}$$

$f:\mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_1[x]$ $\qquad f(P)=P'$

$\mathcal{B}=\{1,x,x^2\}$ $\qquad \mathcal{B}'=\{2,x\}$

$\updownarrow$ $\mathbb{R}^3$ $\quad\quad$ $\updownarrow$ $\mathbb{R}^2$ $\quad\quad$ $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$f(1) = 0 = 0\cdot 2 + 0\cdot x \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = 1 = \tfrac{1}{2}\cdot 2 + 0\cdot x \longrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

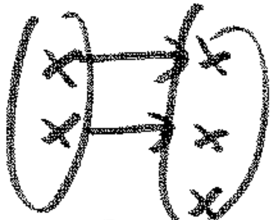
$$f(x^2) = 2x = 0\cdot 2 + 2\cdot x \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

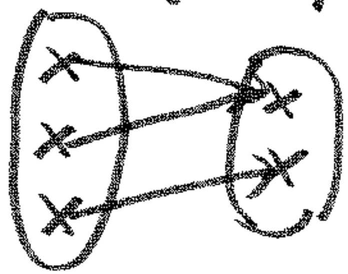
$f: V \longrightarrow W$ aplicación lineal

Núcleo de f: $\quad \mathrm{Ker}(f) = \{\vec{x} \in V : f(\vec{x}) = \vec{0}\}$

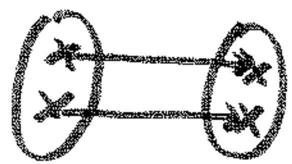
Imagen de f: $\quad \mathrm{Im}(f) = \{\vec{y} \in W : \vec{y} = f(\vec{x}),\ \vec{x} \in V\}$




Inyectiva



Sobreyectiva



Biyectiva

<u>Prop</u>. $f: V \longrightarrow W$ apl. lineal

$\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\} \iff f$ inyectiva

$\mathrm{Im}(f) = W \iff f$ sobreyectiva.

$\mathrm{Im}(f) = W,\ \mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\} \iff f$ biyectiva

<u>Prop</u> $f: V \to W$ apl lineal $\quad A =$ su matriz (elegidas bases)

Entonces $\quad \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim V - rg(A)$

$\quad \dim \mathrm{Im}(f) = rg(A)$

<u>Ejemplos</u> $\quad f: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x] \quad f(P) = (x-1)P' + P$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad rg(A) = 3$$

$\dim \mathrm{Ker}(f) = 3 - 3 = 0 \Leftrightarrow f$ inyectiva

$\dim \mathrm{Im}(f) = \underset{\dim \mathbb{R}_2[x]}{\overset{\shortparallel}{3}} \Leftrightarrow f$ sobre

$f: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_1[x] \qquad f(P) = P' \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$rg(A) = 2 \qquad \dim Ker(f) = 3 - 2 = 1 \rightarrow$ no inyectiva

$\dim Im(f) = 2 = \dim \mathbb{R}_1[x] \rightarrow$ sobreyectiva

---

¿Por qué $\dim Im(f) = rg(A)$?

Pasando a coordenadas me imagino $f: K^n \longrightarrow K^m$

$$A = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \cdots & f(\vec{e}_n) \end{pmatrix}$$

$rg(A) =$ nº de columnas pivote

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & f(\vec{e}_3) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} * & & \\ 0 & * & \\ 0 & 0 & * \\ & & \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 f(\vec{e}_1) + \lambda_2 f(\vec{e}_2) + \lambda_3 f(\vec{e}_3) = \vec{0}$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ son l.i.

y no puedo añadir columnas no pivote

Conclusión: Una base de $Im(f)$ se consigue con las columnas pivote de la matriz (si no estamos en K^n estas columnas dan las coordenadas)

$\dim Im(f) = rg(A)$

$rg(A) =$ nº máximo de columnas de A lin. indep.

$=$ " " " filas " " " "

$rg(A) = rg(A^t)$

<u>Ej</u> Hallar bases de $Ker(f)$ e $Im(f)$

para $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ $\quad f(\vec{x}) = A\vec{x}$

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 9 & 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Gauss}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Base de $\mathrm{Im}(f)$ $\qquad \mathcal{B}_I=\left\{\begin{pmatrix}4\\2\\1\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\3\\-1\end{pmatrix}\right\}$

$\dim \mathrm{Im}(f)=3$

$\dim \mathrm{Ker}(f)=4-3=1$ $\quad$ (con una solución $\neq \vec{0}$ tengo una base)

$$\begin{cases} x_1 \qquad +3x_3-2x_4=0 \\ \quad x_2-6x_3+5x_4=0 \\ \qquad\quad -x_3+x_4=0 \end{cases}$$

$x_4=1 \quad x_3=1 \quad x_2=1 \quad x_1=-1$

$\mathcal{B}_K=\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ $\qquad f(P) = x P'' + 6x \int_0^1 P$

- $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ ¿matriz de f?
- ¿Bases de $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$?

$$f(1) = 6x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$f(x) = 3x \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$f(x^2) = 2x + 2x^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$1^a, 3^a \longrightarrow$ pivote

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B}_I = \{6x, \; 2x + 2x^2\}$$

$\dim \mathrm{Im}(f) = 2$ $\qquad \dim \mathrm{Ker}(f) = 3 - 2 = 1$

$A\vec{x}=\vec{0}$ $\quad 6x_1+3x_2+2x_3=0$ $\quad x_3=0 \quad x_2=-2 \quad x_1=1$

$2x_3=0$

(lo que quiera)

$\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{B}_K=\{1-2x\}$

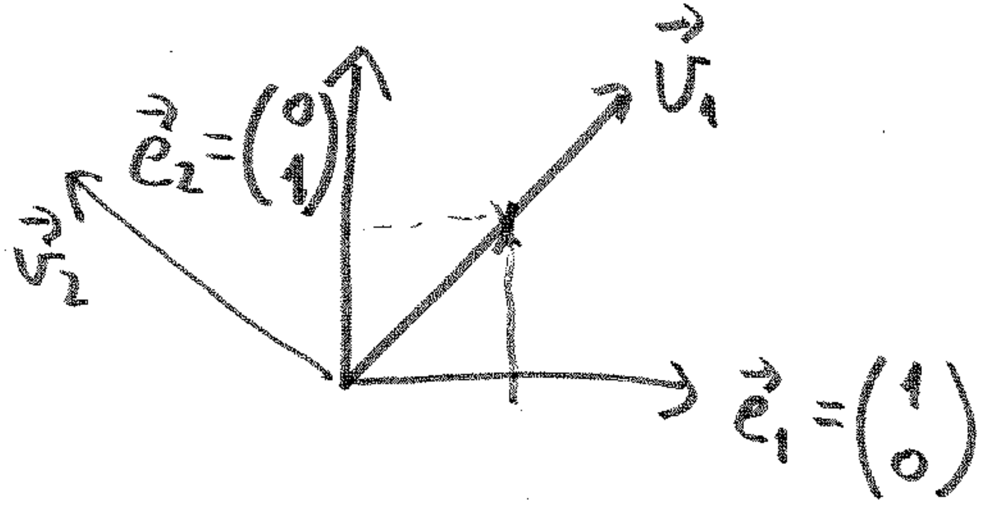
$f: V \longrightarrow W$ $\quad V=W$ endomorfismo

$Im(f)=f(V)$ $\quad Ker(f)=\{\vec{x}\in V: f(\vec{x})=\vec{0}\}$

$f \xrightarrow[\mathcal{B}]{} A$ matriz $\quad \dim Im(f)=rg(A)$

$\dim Ker(f)=\dim V-rg(A)$

Cambio de Base



$$\vec{U}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{U}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$$

$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ coordenadas en $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

$$\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{U}_1 + 0\,\vec{U}_2$$

$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ Coordenadas en $\{\vec{U}_1, \vec{U}_2\}$

$\vec{x}$ = coordenadas en la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

$\vec{x}\,'$ = " " " $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

$\vec{x} = C\,\vec{x}\,'$ $\quad C =$ matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}'$ en la base $\mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$$

$$= x_1' \vec{v}_1 + x_2' \vec{v}_2 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} | & | \\ | & | \end{pmatrix} \\ \vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \end{array} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = C\,\vec{x}\,' \qquad C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ endomorfismo $f: V \longrightarrow V$

Ej $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2/2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

¿Cuando cambiamos de base, ¿cómo cambia la matriz de un endomorfismo?

$\vec{y} = A\vec{x}$ $\quad \vec{y} = f(\vec{x})$

$$\vec{y} = A\vec{x} \quad \xRightarrow[\vec{y} = C\vec{y}']{\vec{x} = C\vec{x}'} \quad \begin{aligned} C\vec{y}' &= AC\vec{x}' \\ \vec{y}' &= C^{-1}AC\vec{x}' \end{aligned}$$

Nueva matriz $C^{-1}AC = A'$

Ej: $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$f(\vec{x}) = A\vec{x}$ $\quad A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1/2\end{pmatrix}$ en la base $\mathcal{B}$

¿Cuál es la matriz en la base $\mathcal{B}'$?

$\vec{x} = C\,\vec{x}'$ $\qquad C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$

$\vec{y} = A\vec{x} \Rightarrow C\vec{y}' = AC\vec{x}' \Rightarrow \vec{y}' = \underbrace{C^{-1}AC}_{A'}\vec{x}'$

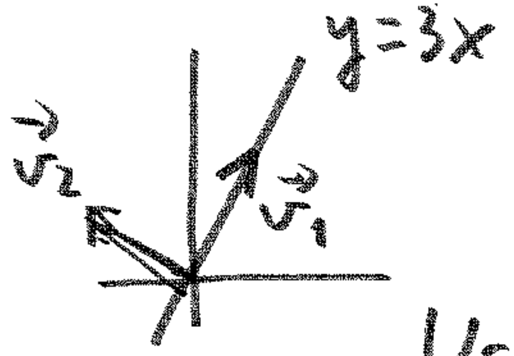
$A' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1/2\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3/2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$



$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Usando $\mathcal{B}' = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \}$

La fórmula para calcular la simetría por $y=3x$ es fácil

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1' \\ -x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

La simetría en la base $\mathcal{B}'$ tiene como matriz $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Es $\vec{y}' = A\vec{x}'$

Queremos hallar la matriz (la fórmula de la simetría) en la base habitual

$\mathcal{B} = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathcal{B}' = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\vec{x} = C\vec{x}' \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}' = \underset{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{\underset{\parallel}{A'}}\vec{x}' \xrightarrow[\vec{y} = C\vec{y}']{\vec{x} = C\vec{x}'} C^{-1}\vec{y} = A' C^{-1}\vec{x}$$

$$\vec{y} = \underbrace{C A' C^{-1}}_{A}\vec{x}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\vec{y} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\vec{x}$ ec. de la simetría por $y=3x$ en la base canónica

Compr.

$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{v_1}$ queda invariante

$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{v_2}$ pasa a $-\vec{v_2}$.

Ej

$V = \{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : X = X^t \}$

$X_1, X_2 \in V,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)^t$

$\Rightarrow V$ es espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B_2} + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B_3}$$

Son sistema de generadores

son l.i. $\Longrightarrow \mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3\}$ es base

$\Rightarrow \dim V = 3$

Comprobar que $\mathcal{B}' = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B_1'}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B_2'}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B_3'} \right\}$ es base

$\lambda_1 B_1' + \lambda_2 B_2' + \lambda_3 B_3' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow$ l.i.

$\Rightarrow \mathcal{B}'$ es base

$f: V \longrightarrow V \qquad f(X) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Es aplicación lineal (endomorfismo)

$f(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 f(X_1) + \lambda_2 f(X_2)$

Hallemos $Ker(f) \qquad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$Ker(f) = \{ X \in V : TXT = O \}$

$= \{ O \}$

$TXT = O$

$XT = T^{-1} O = O$

$X = O T^{-1} = O$

$\Rightarrow f$ es inyectiva

$\dim Ker(f) = 0$

$\dim Im(f) = \dim V - 0 = 3$

$\Rightarrow f$ es sobreyectiva $\rightarrow f$ es biyectiva

$$\mathcal{B} = \left\{ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ B_1' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_2' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B_3' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$f(X') = T X' T \qquad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallemos la matriz de f en la base $\mathcal{B}$ y cambiémosla a la base $\mathcal{B}'$

$$f(B_1) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 4B_1 + 2B_2 + B_3$$

$$f(B_2) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 4B_1 + 3B_2 + 2B_3$$

$$f(B_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B_1 + B_2 + B_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de f en la base $\mathcal{B}$

$B_1' = B_1 + B_2$

$B_2' = 2B_1 + B_3$ $\qquad \vec{x} = C\vec{x}' \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B_3' = -B_1$

$\vec{y} = A\vec{x} \xRightarrow[\vec{y} = C\vec{y}']{\vec{x} = C\vec{x}'} C\vec{y}' = AC\vec{x}'$

$A' = C^{-1}AC$

$A' = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.5 Suma e intersección de subespacios

No está en la guía (Versión reducida)

V, W subespacio de un espacio vectorial

$V \cap W$ es también subespacio

$V + W = \{\vec{v} + \vec{w} : \vec{v} \in V, \vec{w} \in W\}$ es subespacio

$$V = \{\vec{x} \in K^n : A\vec{x} = \vec{0}\} \iff \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \text{— — — —} \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

$W = \{\vec{x} \in K^n : B\vec{x} = \vec{0}\} \iff$ otras ecuaciones

$V \cap W = \{\vec{x} \in K^n$ que cumplen todas las ec.$\}$

$V = \mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\})$ $\quad W = \mathcal{L}(\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\})$

$V + W = \mathcal{L}(\{$todos los vectores$\})$

Esto motiva el siguiente problema:

V = subespacio $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ ó $V = \mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\})$

¿Cómo hallar ecuaciones para $V \subset K^n$?

Es decir $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ tal que

$$V = \{\vec{x} \in K^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$$

Veámoslo con un ejemplo $V \subset \mathbb{R}^4$

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -6 \\ 23 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{base de } V$$

$$V = \{\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2\} = \mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\})$$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V$ $\quad$ $\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} = \vec{x}$

debe tener solución en λ_1, λ_2

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & x_1 \\ 2 & -8 & x_2 \\ 2 & -6 & x_3 \\ -3 & 23 & x_4 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} \vec{v_1} & \vec{v_2} & \vec{x} \end{array} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & x_1 \\ 0 & 2 & 2x_1+x_2 \\ 0 & 4 & 2x_1+x_3 \\ 0 & 8 & -3x_1+x_4 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & x_1 \\ 0 & 2 & 2x_1+x_2 \\ 0 & 0 & -2x_1-2x_2+x_3 \\ 0 & 0 & -11x_1-4x_2+x_4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{V \text{ tiene ecuaciones} \begin{cases} -2x_1-2x_2+x_3=0 \\ -11x_1-4x_2+x_4=0 \end{cases}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -6 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Hoja 3 $\longrightarrow$ Web

Apuntes del capítulo 2 $\longrightarrow$ Web

Repaso del capítulo 2

2.1 Espacio vectorial

sitio donde se pueden hacer combinaciones lineales $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ $\quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Ej $\mathbb{R}_2[X] = \{$ polinomios grado $\leq 2 \}$

Contraej $\{$ polinomios grado $= 2\}$

$1\cdot(x+2x^2)+(-2)(1+x^2)$

2.2 $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ base de V

base $\Leftrightarrow$ 1) genera V $\Leftrightarrow \mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}) = V$

2) son l.i. $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

$n = \dim V$ dimensión = # el. de $\mathcal{B}$

Obs: Si conocemos $\dim V$ y coincide con el n.º de elementos de una posible base, basta comprobar 2).

Ej $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ¿es base de $\mathbb{R}^2$?

$\dim \mathbb{R}^2 = 2$ $\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3\lambda + 2\mu = 0 \\ 2\lambda + \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0 \Leftrightarrow \text{son l.i.} \Rightarrow \mathcal{B} \text{ es base}$$

$\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{C}^n = n$

$\dim \mathcal{M}_{m\times n}(K) = mn$

$\dim \{\vec{x} \in K^n : A\vec{x} = \vec{0}\} = \dim V - rg(A)$

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ base de V

$\vec{x} \in V \quad \vec{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n \qquad \vec{x} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

coordenadas en la base $\mathcal{B}$

Ej. $V = \mathbb{R}_2[x] \qquad P = 1 + x^2 \in V$

$\mathcal{B} = \{\underset{P_1}{x}, \underset{P_2}{(x+1)^2}, \underset{P_3}{(x+2)^2}\}$ es base

$P = -2P_1 + P_2 + 0P_3 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>2.3</u> $f: V \longrightarrow W$

aplic. lineal $\Leftrightarrow$ preserva comb. lineales

(V=W apl. lin. = endomorfismo).

Fijadas bases de V y W coordenadas $\vec{x} \Leftrightarrow K^n$

$\vec{y} = f(\vec{x}) \Leftrightarrow K^m$

En el caso $f: K^n \longrightarrow K^m$

Siempre $f(\vec{x}) = A\vec{x}$

Columnas de A = coordenadas de las imágenes de los elementos de la base

$\mathcal{B}_V = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ $$A = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ f(\vec{v}_1) & f(\vec{v}_2) & & f(\vec{v}_n) \end{pmatrix}$$

Ej $V = \mathbb{R}_2[X]$ $\quad f(P) = P + P'$

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ hallar la matriz de f

$f(1) = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$

$f(x) = x+1 = 1\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2$

$f(x^2) = x^2 + 2x = 0\cdot 1 + 2\cdot x + 1\cdot x^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{x} : f(\vec{x}) = \vec{0}\}$ $\quad f : V \longrightarrow W$

$\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim V - rg(A)$

$\dim \mathrm{Im}(f) = rg(A)$

$\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim V$

Ej (anterior) $A\vec{x} = \vec{0} \iff \vec{x} = \vec{0}$

$\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ $\quad \dim \mathrm{Ker}(f) = 0 \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(f) = 3$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$

$\dim \operatorname{Ker}(f) = 0 \iff f$ es inyectiva

$\dim \operatorname{Im}(f) = \dim W \iff f$ es sobreyectiva

<u>Obs:</u> $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ es biyectiva

$P \longmapsto P + P'$ (inyectiva + sobre)

<u>2.4</u> $\underset{\text{coord en } \mathcal{B}}{\vec{x}} = C \underset{\text{coord en } \mathcal{B}'}{\vec{x}'}$ column. $C = \left\{ \begin{array}{l} \text{coord. de los vectores} \\ \text{de } \mathcal{B}' \text{ en } \mathcal{B} \end{array} \right.$

$$\vec{y} = \underbrace{A}_{\mathcal{B}} \vec{x} \implies C\vec{y}' = AC\vec{x}' \implies \vec{y}' = \underbrace{C^{-1}AC}_{\mathcal{B}'} \vec{x}'$$

2.5 Ej. $V = \mathcal{L}\left(\left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}\right)$ ¿ecuaciones?

$$\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ 1 & -2 & x_3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x_1 \\ 0 & -5 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & -5 & x_3 - x_1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} & & \\ & -5 & \\ 0 & 0 & x_1 - x_2 + x_3 \end{array}\right)$$

$$V = \{ \vec{x} : x_1 - x_2 + x_3 = 0 \}$$