Capítulo 1

Sistemas de ecuaciones lineales

1.1 Eliminación de Gauss

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\cdots$$

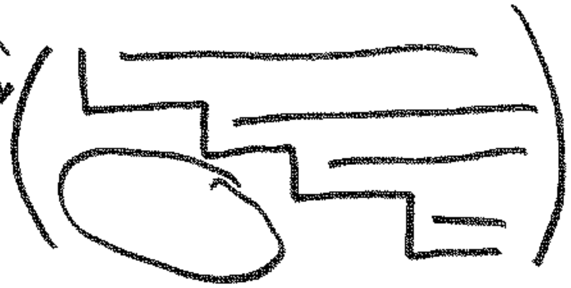
$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A\vec{x} = \vec{b}} \qquad A = (a_{ij})$$

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} d_1 x_1 = b_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ d_n x_n = b_n \end{array}$$

Fácil

$A \stackrel{1}{=}$ 

matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Idea:</u> • A escalonada $\rightarrow$ sistema fácil

A no escalonada $\xrightarrow[\text{Gauss}]{}$ A' escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

altura escalones = 1

los escalones no empiezan por 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 = 6 \longrightarrow x_1 = 1$$
$$x_2 - x_3 = -1 \longrightarrow x_2 = -2$$
$$3x_3 = -3 \longrightarrow x_3 = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 6 \\ x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned} \qquad \xrightarrow{x_3 = \lambda} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{5+3\lambda}{2} \\ x_2 &= -1+\lambda \\ x_3 &= \lambda \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda &= 11 \\ x_1 &= 19 \\ x_2 &= 10 \\ x_3 &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 4 \\ x_2 &= -2 \end{aligned} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

¿Cómo pasar todo sistema a uno con matriz escalonada?

Reducción de Gauss / eliminación de Gauss

Apliar las "transformaciones elementales":

1. Sumar a una fila un múltiplo de otra
2. Multipliar una fila por un número $\neq 0$
3. Intercambiar dos filas.

Se aplican a la "matriz ampliada" del sistema $A\vec{x}=\vec{b}$ m. ampliada $(A|\vec{b})$

1, 2, 3 no modifican el conjunto de soluciones

6

Ej. $A\vec{x}=\vec{b}$ $\quad \vec{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ $\quad A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2\\ 2 & 1 & -4\\ -2 & 3 & 3\\ 10 & -2 & -10\end{pmatrix}$ $\quad \vec{b}=\begin{pmatrix} 6\\ 4\\ -11\\ 24\end{pmatrix}$

$\big({}^2\, 2\; 0\; 3 \qquad 2\; 2\; 3\; 0$

$$(A|\vec{b}) \xrightarrow[\substack{f_2\mapsto f_2-f_1\\ f_3\mapsto f_3+f_1\\ f_4\mapsto f_4-5f_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 6\\ 0 & 2 & -2 & -2\\ 0 & 2 & 1 & -5\\ 0 & 3 & 0 & -6\end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_2\mapsto \frac{f_2}{2}\\ f_4\mapsto \frac{f_4}{3}}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 6\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 1 & -5\\ 0 & 1 & 0 & -2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{f_3\mapsto f_3-2f_2\\ f_4\mapsto f_4-f_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 6\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right) \xrightarrow[f_4\mapsto f_4-\frac{f_3}{3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 6\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 - x_2 - 2x_2 = 6 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_3 = -3 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{array}$$

(Hecho antes)

Escalones $\to$ altura 1

principios de cada escalón $\neq 0$ <u>pivotes</u>

$$\left.\begin{array}{l}(2-i)x_1 - x_2 = 2\\ i\,x_1 + (1+i)x_2 = 1\end{array}\right\}$$

Posibilidad

$$f_2 \longmapsto f_2 - \frac{i}{2-i} f_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2-i & -1 & 2\\ i & 1+i & 1\end{array}\right) \xrightarrow[f_1 \leftrightarrow f_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} i & 1+i & 1\\ 2-i & -1 & 2\end{array}\right)$$

$i \cdot i = -1$

$\frac{1}{i} = -i$

$$\xrightarrow[f_2 \mapsto f_2 + (1+2i) f_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} i & 1+i & 1\\ 0 & -2+3i & 3+2i\end{array}\right)$$

$$(1+i)(1+2i) = 1 + 2i + i - 2 = -1 + 3i$$

$$\left.\begin{aligned} i x_1 + (1+i)x_2 &= 1 \\ (-2+3i)x_2 &= 3+2i \end{aligned}\right\} \longrightarrow i x_1 + (-i+i) = 1 \longrightarrow x_1 = i$$

$$x_2 = \frac{3+2i}{-2+3i} = -i$$

$$\frac{3+2i}{-2+3i} = \frac{(3+2i)\,(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} = \frac{-6-9i-4i+6}{2^2+3^2} = \frac{-13i}{13} = -i$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1 \leftrightarrow f_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[x_3 = \lambda]{} x_2 = \frac{3-\lambda}{2} \longrightarrow x_1 = \frac{7\lambda-5}{2}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 \to f_2 - f_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} 2x - y = 7 \\ 0y = -6 \end{array} \longrightarrow \text{No tiene solución}$$

1.2 Solución general

¿Cuál es la estructura del conjunto de soluciones?

Lema Al hallar la forma escalonada los pivotes siempre aparecen en las mismas posiciones independientemente de cómo hagamos la reducción de Gauss.

Rango de $A = rg(A)$ = # pivotes
= # escalones tras reducción de Gauss

Lema $\Rightarrow$ $A \to \begin{pmatrix} P_1 & & \\ 0 & P_2 & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \not\to \begin{pmatrix} P_1 & & \\ 0 & 0 & P_2' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\not\to \begin{pmatrix} P_1 & & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Idea dem. lema:

Si x_j está en una columna donde hay un pivote, la puedo despejar en función de las anteriores

Las otras se pueden escoger arbitrariamente.

$A\vec{x} = \vec{0}$ Sistema homogéneo

Siempre tienes al menos la solución $\vec{x} = \vec{0}$

$A\vec{x}=\vec{b}$ $\quad (A|\vec{b})$ = matriz ampliada $= A^{+}$

<u>Teorema</u> $A\vec{x}=\vec{0}$ $\quad A\in\mathcal{M}_{m\times n}$ $\quad r=rg(A)$

Si $r=n \longrightarrow$ la única solución es $\vec{x}=\vec{0}$

Si $r<n \longrightarrow$ Todas las soluciones son

$$\vec{x}=\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\dots+\lambda_{n-r}\vec{v}_{n-r}$$

donde λ_j son arbitrarios y $\vec{v}_j$ son ciertos vectores. Además elecciones distintas de $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n-r}$ ~~dan~~ dan soluciones diferentes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 4 & -6 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & -7 \end{pmatrix} \qquad A\vec{x} = \vec{0}$$

$$\underset{(A|\vec{0})}{A} \xrightarrow[\substack{f_3 \mapsto f_3 - 2f_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 \mapsto f_2 + 3f_1$$

$$\xrightarrow[f_3 \mapsto f_3 - 3f_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 & \rightarrow x_1 = -x_2 - 2x_4 \\ x_3 - x_5 = 0 & \rightarrow x_3 = 0 \\ 2x_5 = 0 & \rightarrow x_5 = 0 \end{cases}$$

$x_2 = \lambda_1 \qquad x_4 = \lambda_2$

$$\begin{cases} x_1 = -\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ x_2 = \lambda_1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \lambda_2 \\ x_5 = 0 \end{cases} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2}$$

El teorema es natural

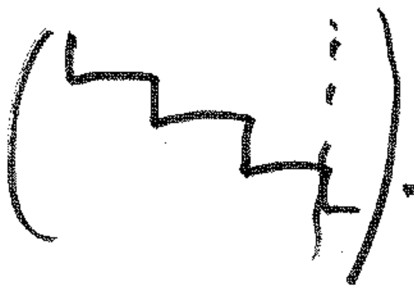
$rg(A) = r \longrightarrow r$ variables que se pueden despejar en función de las anteriores

$\longrightarrow n-r$ parámetros libres

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + \dots + a_{n-r\,1}\lambda_{n-r} \\ &\vdots \\ x_n &= a_{1n}\lambda_1 + \dots + a_{n-r\,n}\lambda_{n-r} \end{aligned} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_{n-r} \begin{pmatrix} a_{n-r\,1} \\ \vdots \\ a_{n-r\,n} \end{pmatrix}$$

<u>Teorema</u> $A\vec{x}=\vec{b}$ tiene solución si y solo si $rg(A) = rg(A|\vec{b})$.

Además si existe solución entonces todas las soluciones son de la forma $\vec{x}=\vec{x}_0+\vec{y}$ con $\vec{x}_0$ una (cualquiera) de ellas e $\vec{y}$ las soluciones de $A\vec{y}=\vec{0}$.



$\Longleftrightarrow rg(A) \neq rg(A|\vec{b})$

$\longrightarrow 0x_n = p \neq 0 \Rightarrow$ contr.

$\vec{x}_0$ solución $\Longleftrightarrow A\vec{x}_0 = \vec{b}$

$\vec{y}$ sol. homogéneo $\Leftrightarrow A\vec{y} = \vec{0}$

$$A(\vec{x}_0 + \vec{y}) = \vec{b}$$

$\Rightarrow \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{y}$ resuelve $A\vec{x} = \vec{b}$

<u>Corolario</u> (tma de Rouché-Frobenius) $A\vec{x} = \vec{b}$

$A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ ($m = \#$ec. $n = \#$ incog.)

1) Sol. única (compatible determinado)
$\Longleftrightarrow rg(A) = rg(A|\vec{b}) = n$

2) Inf. sol. (compatible indeterminado)
$\Longleftrightarrow rg(A) = rg(A|\vec{b}) \lneq n$

3) $\nexists$ sol. (incompatible) $\iff rg(A) \neq rg(A|\vec{b})$

Un problema de una prueba EVAU:

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda z = 2 \\ x + \lambda y - z = 1 \\ x + 3y + z = 2\lambda \end{cases}$$

Discutir en términos de λ

Resolverlo si $\lambda = 1$

$$f_1 \leftrightarrow f_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2\lambda \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_2 \mapsto f_2 - f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - \lambda f_1}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2\lambda \\ 0 & \lambda-3 & -2 & 1-2\lambda \\ 0 & -3\lambda & 0 & 2-2\lambda^2 \end{array}\right)$$

escalonada $\Longleftrightarrow \lambda = 0 \to$ incompatible

$\lambda \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2\lambda \\ 0 & -3\lambda & 0 & 2-2\lambda^2 \\ 0 & \lambda-3 & -2 & 1-2\lambda \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \mapsto f_3 + \frac{\lambda-3}{3\lambda} f_2]{}$$

Para $\lambda \neq 0 \Rightarrow$ compatible determinado

Reducción de Gauss no es única

1.3 Matriz inversa

Reducción Gauss-Jordan: Es una forma del algoritmo de Gauss que lleva a una matriz escalonada ... única llamada <u>forma escalonada reducida</u>

Pedimos que:

- Los pivotes sean 1
- Haya ceros encima de los pivotes.

$$A^{*}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1 \leftrightarrow f_2,\ f_3 \mapsto f_3 - f_1,\ f_3 \mapsto f_3 - f_2]{} E=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

E escalonada pero no escalonada reducida.

$$E \xrightarrow[f_2 \mapsto \frac{f_2}{2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1 \mapsto f_1 - f_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1ª ventaja: Es más fácil hallar la solución

$\boxed{x_3=\lambda}$ 2ª $f \to$ $\boxed{x_2=\frac{3-\lambda}{2}}$ 1ª $f \to$ $\boxed{x_1=\frac{7\lambda-5}{2}}$

<u>Prop.</u> Cada matriz A tiene una sola forma escalonada reducida.

2^a ventaja: Permite resolver simultáneamente varios sistemas con la misma A.

$$A\vec{x} = \vec{b}_1 \quad , \quad A\vec{x} = \vec{b}_2 , \quad A\vec{x} = \vec{b}_3 , \ldots \quad A\vec{x} = \vec{b}_N$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Se suele escribir $(A | \vec{b}_1 \vec{b}_2 \vec{b}_3)$

$$(A \mid \vec{b}_1 \vec{b}_2 \vec{b}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{f_1 \leftrightarrow f_2 \\ f_3 \mapsto f_3 - f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - f_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{(Gauss)}$$

$$\xrightarrow[f_2 \to \frac{f_2}{2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$f_1 \mapsto f_1 - f_2 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7/2 & -5/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{Gauss-Jordan}$$

1^er^ sistema $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \vec{v}$

2º sistema $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \vec{v}$

3^er^ sistema $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \vec{v}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_3 = \lambda$ $\quad x_1 = \frac{7}{2}\lambda - \frac{5}{2}$

$x_2 = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 7/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2}\lambda - \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2}\lambda + 3/2 \\ \lambda + 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 7/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3ª ventaja: $\longrightarrow$ Cálculo de inversas

$A \in \mathcal{M}_n$ a veces existe una <u>matriz inversa</u>, es decir, A^{-1} tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \qquad (I = I_n,\ A^{-1} \in \mathcal{M}_n)$$

<u>Prop.</u> Una matriz A tiene inversa (es invertible) $\iff$ $A \in \mathcal{M}_n$ (es cuadrada) y $rg(A) = n$.

$B = A^{-1}$ $\qquad B = (\vec{b}_1\, \vec{b}_2, \ldots \vec{b}_n)$

$AB = I$ $\qquad \vec{x} = \vec{b}_1$ $\qquad A\vec{b}_1$ es la 1ª columna de AB

$$A\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

En general las columnas de B son soluciones de sistemas

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al aplicar Gauss-Jordan a $(A|I)$

Si Gauss-Jordan no diera $(I|B)$ no sería compatible (determinado)

Si hubiera menos de n pivotes $rg(A) \neq n$ entonces no podríamos resolver estos sistemas.

$$(A|I) \xrightarrow[G-J]{} (I|A^{-1})$$

Ej Hallar la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 11 \end{pmatrix} \qquad (A|I) \xrightarrow[G-J]{} (I|A^{-1})$$

$$(A|I) \xrightarrow[\substack{f_2 \mapsto f_2 - 2f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 + f_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \mapsto f_3 - 3f_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_1 \mapsto f_1 - 2f_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_1 \mapsto f_1 + 7f_3 \\ f_2 \mapsto f_2 - 3f_3}]{} \left(\begin{array}{c|ccc} & 54 & -23 & 7 \\ I & -23 & 10 & -3 \\ & 7 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 54 & -23 & 7 \\ -23 & 10 & -3 \\ 7 & -3 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}}$$

Propiedad: $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Si $A = A^t$, $A^{-1} = (A^t)^{-1} \underset{\text{Propiedad}}{=} (A^{-1})^t$

$A^{-1}A = I \quad AA^{-1} = I \Longrightarrow A^t(A^{-1})^t = I, \quad (A^{-1})^t A^t = I$

$\Longrightarrow (A^{-1})^t$ es inversa de A^t

Propiedad $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ A, B invertibles

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = I$

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \cdots\cdots = I$

$(A_1A_2\cdots A_N)^{-1} = A_N^{-1}A_{N-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$

$A \in \mathcal{M}_2$ $\qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\qquad$ ¿Cuándo es invertible?
¿Cuál es su inversa?

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$a \neq 0$

$$d - \frac{cb}{a} = \frac{ad-cb}{a} = \frac{\Delta}{a} \quad \Bigg| \quad \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & \Delta/a & -c/a & 1 \end{array}\right)$$

invertible $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & d/\Delta & -b/\Delta \\ 0 & 1 & -c/\Delta & a/\Delta \end{array}\right)$$

$\Delta \neq 0 \Leftrightarrow$ invertible $\qquad \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2i & 1+2i \\ -1+2i & -2i \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = 3\begin{pmatrix} 2i & 1+2i \\ -1+2i & -2i \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Delta = ad-bc = 2i(-2i)-(1+2i)(-1+2i) = 4-(-4-1) = 9$$

$$A^{-1} = 3\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2i & -1-2i \\ 1-2i & 2i \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2i & -1-2i \\ 1-2i & 2i \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2i & 1+2i \\ -1+2i & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2i & -1-2i \\ 1-2i & 2i \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = I$$

Temas del primer capítulo

- Resolver sistemas por Gauss (forma escalonada)
- Discutir sistema (Rouché–Frobenius, rango)
- Matriz inversa y Gauss-Jordan