Hoja 2

Nota. *En los dos primeros ejercicios se da por sabido que* K^n, $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ *y* $\{f : X \longrightarrow K\}$ *con* $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *son espacios vectoriales. Se denotan con* $\mathbb{R}[x]$ *y* $\mathbb{C}[x]$ *los espacios vectoriales de polinomios reales y complejos, respectivamente, y con* $\mathbb{R}_n[x]$ *y* $\mathbb{C}_n[x]$ *los de grado a lo más* n.

1) Indica cuáles de los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$:
a) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + 2x_2 = 0,\ x_2 + x_3 = 1\}$.
b) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,:\, A^2 = A\}$.
c) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,:\, A + A^t = O\}$.
d) $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables tales que $f'(x) + (x + 2020)f(x) = 0\}$.

2) Indica cuáles de los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$:
a) $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ con dos derivadas tales que $f'' + 4\operatorname{sen} f = 0\}$.
b) $\{P \in \mathbb{C}[x] \,:\, P(x) = P(1 + i - x)\}$.
c) $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \,:\, B^tAB = I_2$ con $b_{11} = b_{12} = i,\ b_{21} = b_{22} = 1\}$.
En a) da por hecho que existe una función no constante que satisface esta ecuación (que es la ecuación del péndulo simple). Por si no lo sabes, el seno se puede evaluar en números complejos.

3) Explica con detalle por qué $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,:\, A = A^\dagger\}$ no es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ pero sí lo es sobre $\mathbb{R}$.

4) Recuerda que en el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ se permite la multiplicación de vectores por números complejos ($K = \mathbb{C}$) y que $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$ es similar pero permitiendo solo la multiplicación por números reales ($K = \mathbb{R}$). Explica por qué $\dim \mathbb{C}^2 = 2$ y $\dim \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}} = 4$. Escribe en cada caso una base.

5) Halla una base de $V = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^3 \,:\, x_1 + x_2 + 2ix_3 = 0\}$ y añade los vectores que sean necesarios para extenderla a una base de $\mathbb{C}^3$.

6) Calcula una base de las matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ simétricas (esto es, $A = A^t$) tales que la suma de sus columnas sea el vector nulo $\vec{0}$.

7) Halla una base del subespacio (sobre $\mathbb{C}$) $V = \{P \in \mathbb{C}_3[x] \,:\, x + i$ divide a $P\}$ y halla las coordenadas de $x^3 + (1 + 3i)x^2 + 2(i - 1)x - 1$ en esa base.

8) Comprueba que $f_1(x) = \operatorname{sen}(3x)$ y $f_2(x) = \cos(3x)$ pertenecen al espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ de funciones con dos derivadas que resuelven la ecuación del movimiento armónico simple $f'' + 9f = 0$. Prueba que f_1 y f_2 son linealmente independientes y considera combinaciones lineales suyas para hallar una solución de

$$f'' + 9f = 0 \qquad \text{con} \quad f\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = 5, \quad f'\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = 9.$$

9) Decide si las matrices

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

conforman una base del subespacio $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \,:\, A = A^\dagger,\ a_{11} + a_{22} = 0\}$ sobre $\mathbb{R}$.

10) Halla bases del núcleo y de la imagen de la aplicación lineal $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & 12 & -10 & 0 \\ 2 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

11) Sea el subespacio $V \subset \mathbb{R}[x]$ cuya base es $\mathcal{B} = \{(x+1)^2, x^2+1\}$. Explica por qué la aplicación que envía $P(x)$ a $P(-x)$ es un endomorfismo biyectivo y halla su matriz y la de su inversa en la base $\mathcal{B}$.

12) Estudia si la aplicación lineal $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dada por

$$f(A) = B^t A B \qquad \text{con} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

es inyectiva o sobreyectiva. Halla una base de su imagen.

13) Considera el endomorfismo de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dado por

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A - A \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Halla su matriz en alguna base (la que prefieras) y calcula la dimensión de su núcleo e imagen.

14) Halla la matriz del endomorfismo $f(X) = TXT$ donde T es la matriz 2×2 con $t_{11} = 2$, $t_{12} = t_{21} = t_{22} = 1$, en el espacio V generado por la base

$$\mathcal{B}' = \{B_1', B_2', B_3'\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Para ello, ajusta los coeficientes a_{ij} en $f(B_j') = a_{1j}B_1' + a_{2j}B_2' + a_{3j}B_3'$. Con esto tendrás una solución alternativa de uno de los ejemplos resueltos.

15) Dado el endomorfismo de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A + A^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

estudia si su imagen coincide con todas las matrices simétricas. Halla también una base del núcleo.

16) Supongamos que un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ tiene matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{en la base } \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} \text{ donde } \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula su matriz en la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ con $\vec{v}_1 = (1, -2)^t$ y $\vec{v}_2 = (-1, 3)^t$.

17) Halla la matriz del endomorfismo del ejercicio anterior en la base canónica.

18) Halla las ecuaciones del subespacio $V \subset \mathbb{R}^5$ generado por los vectores

$$\vec{v}_1 = (1,2,1,0,1)^t, \qquad \vec{v}_2 = (1,-1,0,2,2)^t, \qquad \vec{v}_3 = (1,1,1,1,0)^t.$$

Es decir, halla una matriz A tal que $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 \,:\, A\vec{x} = \vec{0}\}$.

19) Estudia si se obtiene una base de $\mathbb{R}^4$ o no al añadir los vectores $(1,1,1,1)^t$ y $(1,-2,3,1)$ a los de una base del subespacio

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \,:\, 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 8x_4 = x_1 + x_2 - 5x_4 = 0\}.$$