

Hoja 1

1) Resuelve el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 7 & 11 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Resuelve el sistema con números complejos

$$\begin{aligned} x_1 + ix_3 &= 0, \\ ix_1 + (1+i)x_3 &= -2-i, \\ x_2 + (2+i)x_3 &= -1-i. \end{aligned}$$

3) Halla todas las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 8x_2 + 11x_3 + x_4 &= 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 + x_4 &= 0, \\ 5x_1 - 13x_2 + 18x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Exprésalas, si es posible, como $\vec{x} = \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2$ donde todas las coordenadas de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son enteras.

4) En un examen pasado de acceso a la universidad se pedía discutir el sistema

$$\begin{aligned} 2x + \lambda y + \lambda z &= 1 - \lambda, \\ x + y + (\lambda - 1)z &= -2\lambda, \\ (\lambda - 1)x + y + z &= \lambda - 1 \end{aligned}$$

en términos del parámetro real λ . Hazlo con lo aprendido en este curso.

5) Calcular el rango y la forma escalonada reducida para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda & 1 - \lambda \\ 1 & 1 & \lambda - 1 & -2\lambda \\ \lambda - 1 & 1 & 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

del problema anterior para $\lambda = -1$ y también la última fila de la forma escalonada reducida para el valor no real $\lambda = 1 + i$. *Indicación:* Una vez hecho el ejercicio anterior, este se puede resolver con muy pocas cuentas.

6) Halla las inversas de las siguientes matrices compuestas por ceros y unos o explica por qué no son invertibles:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7) Sea a un parámetro real no nulo. Comprueba que el cálculo de la inversa de la siguiente matriz da el mismo resultado con la fórmula para matrices 2×2 que con Gauss-Jordan.

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + a^{-1} & a - a^{-1} \\ a - a^{-1} & a + a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Indicación: No olvides simplificar todo lo que sea necesario.

8) Halla todas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \quad \text{con} \quad ad - bc = -1$$

tales que coinciden con su inversa. Escribe dos ejemplos, uno con $a, b, c, d \in \mathbb{R} - \{0\}$ y otro con $a, b, c, d \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

9) Considera

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula las inversas de A , B y de AB^{-1} . *Indicación:* Para la última puedes aprovechar cálculos ya hechos.

10) Si A es una matriz que cumple $A^3 = O$ se sabe que $I + 2A$ es siempre invertible y su inversa es de la forma $I + xA + yA^2$. Halla x e y . Si quieres comprobar tu resultado con un ejemplo puedes tomar $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ con todos sus elementos nulos excepto $a_{12} = a_{23} = 1$.