Hoja 0

Nota. *A pesar de que los temas repasados en la teoría han sido muy básicos, algunos de los apartados de los siguientes ejercicios requieren cierta originalidad y pueden suponer un reto nada sencillo para la mayoría de los estudiantes.*

1) Se llama *traza* de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$ a $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

a) Calcula $\operatorname{tr}(BC)$ y $\operatorname{tr}(CB)$ con

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Explica por qué para cualquier $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ distinta de la matriz nula se tiene $\operatorname{tr}(AA^\dagger) > 0$.

c) Sean $B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $C \in \mathcal{M}_{n\times m}$ cualesquiera. ¿Se cumple siempre $\operatorname{tr}(BC) = \operatorname{tr}(CB)$? En caso afirmativo da una pequeña demostración y en caso negativo un contraejemplo.

2) Sea A la matriz 3×3 que tiene $a_{12} = a_{23} = a_{31} = 1$ y el resto de sus elementos nulos.

a) Calcula A^{1001}. *Indicación*: Halla A^1, A^2, $A^3\dots$ y enseguida verás el truco.

b) Calcula $(I + A + A^t)^4$.

c) ¿Es verdad que si $B, C \in \mathcal{M}_n$ tienen ambas sus elementos nulos excepto exactamente un 1 en cada columna y en cada fila entonces BC tiene la misma propiedad? Nota que A y $A^2 = AA$ tienen esta propiedad.

3) En computación cuántica el estado de un *qubit* es un vector $(a, b)^t \in \mathbb{C}^2$. En la jerga se escribe como $a|0\rangle + b|1\rangle$ donde $|0\rangle$ y $|1\rangle$ abrevian $(1, 0)^t$ y $(0, 1)^t$. Físicamente es una superposición de los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Las *puertas lógicas cuánticas* que actúan sobre un qubit son matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ que cumplen $AA^\dagger = I$. Las cuatro más famosas son

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Opera HXH, HZH y $H + XHX + ZXH$ y averigua con cuáles de las puertas lógicas anteriores coinciden.

b) ¿Sabrías imaginar por qué a la puerta X se le llama NOT? *Indicación*: Halla $X|0\rangle$ y $X|1\rangle$.

c) Calcula una matriz S tal que $S(|0\rangle + |1\rangle) = |0\rangle + |1\rangle$ y $S(|0\rangle - |1\rangle) = i|0\rangle - i|1\rangle$. Comprueba que corresponde a una puerta lógica cuántica, es decir, $SS^\dagger = I$, y trata de explicar la afirmación "*S es una raíz cuadrada de NOT*" que uno podría leer en un texto especializado.

4) Se llaman *matrices de Pauli* a las matrices σ_1, σ_2 y σ_3 definidas por

$$\sigma_k = \begin{pmatrix} a_{k3} & a_{k1} - ia_{k2} \\ a_{k1} + ia_{k2} & -a_{k3} \end{pmatrix} \qquad k = 1, 2, 3$$

donde $(a_{ij})_{i,j=1}^3$ es la matriz identidad 3×3. En física estas σ_j se utilizan para representar el espín.

a) Escribe explícitamente las matrices σ_1, σ_2 y σ_3. Verás que han aparecido en un problema anterior.

b) Comprueba las tres relaciones siguientes que son la formalización matemática del principio de incertidumbre al medir el espín en los tres ejes espaciales:

$$\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 = 2i\sigma_3, \qquad \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_2 = 2i\sigma_1, \qquad \sigma_3\sigma_1 - \sigma_1\sigma_3 = 2i\sigma_2.$$

Indicación: Ahorrarás la mitad de las cuentas si justificas primero $\sigma_i\sigma_j = (\sigma_j\sigma_i)^\dagger$.

c) Dados dos vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ considera el producto escalar y el producto vectorial de ellos que has estudiado en el bachillerato: $e = \vec{a} \cdot \vec{b}$ y $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$. Comprueba que

$$\sum_{j=1}^{3} a_j\sigma_j \sum_{k=1}^{3} b_k\sigma_k = eI + i\sum_{\ell=1}^{3} v_\ell\sigma_\ell.$$

Indicación: Una posibilidad para huir de una pesadilla de cuentas es separar en el primer miembro $\sum\sum_{j=k}$ y $\sum\sum_{j\neq k}$ y usar lo aprendido en el apartado anterior.

5) Considera el conjunto $\mathcal{C}$ de matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que tienen $a_{11} = a_{22}$ y $a_{21} = -a_{12}$.

a) Comprueba que si $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ entonces conmutan, esto es, $A_1A_2 = A_2A_1$ y además $A_1A_2 \in \mathcal{C}$.

b) Halla todas las matrices $X \in \mathcal{C}$ que resuelvan la ecuación $X^2 + I = O$ ¿Cuántas hay? En contraste con esto, encuentra infinitas $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que cumplan la ecuación (en este caso no se pide hallar todas las soluciones).

c) Para cada número complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, sea $F(z) = A \in \mathcal{C}$ con $a_{11} = a$ y $a_{12} = b$. Comprueba que F respecta las operaciones de números complejos, es decir, $F(z_1 + z_2) = F(z_1) + F(z_2)$ y $F(z_1z_2) = F(z_1)F(z_2)$. *Indicación*: Aunque no lo parezca a primera vista, puedes aprovechar lo que sabes de $X \in \mathcal{C}$ del apartado anterior para reducir los cálculos.

6) Considera el vector $W = (4/3, -1/3, 1/3)^t$ como matriz columna 3×1.

a) Calcula $WW^t \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ y $W^tW \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

b) Halla también $(I - WW^t)^2$ y $(I - WW^t)^3$.

c) En general, sea $V \in \mathbb{R}^n$ un vector cualesquiera considerado como una matriz columna. Suponiendo $V^tV = (2)$, prueba una fórmula para $(I - VV^t)^m$ donde m es un entero positivo arbitrario. *Indicación*: Intenta justificar que lo del apartado anterior ocurre siempre.

7) Según la mecánica básica de rotación, si tenemos un libro ocupando la región $|x| < d/2$, $|y| < w/2$, $|z| \leq h/2$, la energía que cuesta girarlo alrededor de cierto eje $\vec{e}$ supuesto unitario ($e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$) que pasa por el origen es proporcional a $\vec{e}^{\,t}A\vec{e}$ donde A es la matriz diagonal con $a_{11} = w^2 + h^2$, $a_{22} = d^2 + h^2$, $a_{33} = d^2 + w^2$. ¿En qué dirección cuesta menos girar el libro, en la del lado largo, medio o corto? ¿Hay algún eje oblicuo por el que cueste menos?

8) Cinco niños se sientan en cinco sillas numeradas en su asientos del 1 al 5 pero en cuyos respaldos están respectivamente los números 2, 4, 5, 1 y 3. Juegan a ir a la silla que tiene en el respaldo el número que ven en el asiento. Halla una matriz $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ compuesta de ceros y unos tal que $B = A^n$ cumple que $b_{ij} \neq 0$ si y solo si el niño que inicialmente estaba en la silla con j en el asiento está en la silla con i en el asiento después de jugar n veces. *Indicación*: Resuelve el problema para $n = 1$ y después trata de razonar que sirve también para n mayor.

9) Según una de las primeras formalizaciones de la mecánica cuántica la posición y el momento deberían corresponder a matrices cuadradas X y P satisfaciendo, entre otras propiedades, la relación $XP - PX = i\hbar I$ donde $\hbar$ es cierta constante positiva (la *constante de Planck reducida*) pero los pioneros físicos tuvieron que considerar matrices infinitas. ¿Por qué no existen $X, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cumpliendo esta relación para ningún n (finito)? *Indicación*: ¿Qué ocurre con la suma de los elementos de la diagonal en ambos miembros? Si esto no te dice nada, intenta ver primero por qué no hay soluciones con $X, P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.