Exprimiendo el silicio [opcional]. Dada en `matlab/octave` una matriz cuadrada `A`, su exponencial se calcula con `expm(A)`. La `m` es de *matrix* porque `exp(A)` calcula la exponencial de los elementos por separado (desconozco qué utilidad puede tener esto). El siguiente código evalúa `expm(A*t)x0` para muchos valores de `t` en un intervalo o equivalentemente la solución en esos valores del sistema correspondiente de ecuaciones diferenciales. Con ellos se dibuja una aproximación de las gráficas de las componentes de la solución.

Tal como está, la matriz es la del segundo ejemplo y por tanto las gráficas aproximan a las de las funciones $f_1(t) = 3e^{-t} - 2e^t$ y $f_2(t) = 5e^{-t} - 4e^t$.

```
% Matriz del sistema
A = [-11,6; -20,11]

% Vector inicial
x0 = [1; 1]

% Intervalo
inter = linspace(0,1,300);

sol = [];
for t = inter
        sol = [sol, expm(A*t)*x0];
end

% Dibuja las componentes de la solución
plot(inter,sol')
```

La definición de `inter` significa que estamos en el intervalo $[0, 1]$ tomando 300 puntos intermedios. El bucle en cada paso añade a `sol` la columna correspondiente a la solución en `t`. El comando `plot` dibuja el resultado. En él aparece `sol'` en lugar de `sol` porque este comando dibuja las columnas como gráficas separadas.

Con `sagemath` la exponencial de una matriz `A` se calcula mediante `exp(A)`.

5.4. La forma canónica de Jordan

Nos planteamos ahora qué hacer con los endomorfismos que no son diagonalizables. La respuesta es que casi se diagonalizan y su forma casi diagonal todavía sirve de algo en aplicaciones como las vistas antes, aunque no entraremos en este último punto. La teoría general es complicada y de limitado interés para un ingeniero. Por ello nos restringiremos a los casos de dimensión 2 y 3. Como antes, para que las cosas sean más tangibles, consideraremos matrices en vez de endomorfismos. Toda la sección radica en los dos siguientes resultados y el algoritmo (Proposición 5.4.3) para hallar las bases a las que se refieren:

Teorema 5.4.1. *Dada $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ siempre existe una base de $\mathbb{C}^2$ en la que adquiere una de las siguientes formas:*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \text{o bien} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

El primer caso es el diagonalizable que ya conocíamos, lo que aporta de nuevo el resultado es que las no diagonalizables lo son salvo por un 1 fuera de la diagonal.

Teorema 5.4.2. *Dada $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ siempre existe una base de $\mathbb{C}^3$ en la que adquiere una de las siguientes formas:*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad \textit{o bien} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \textit{o bien} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

De nuevo el primer caso es el diagonalizable y la novedad es que, si no lo es, basta añadir uno o dos unos fuera de la diagonal en ciertas posiciones.

Tanto para $n = 2$ como para $n = 3$, estas matrices diagonales o casi diagonales se dice que son la *forma canónica de Jordan* de la matriz A.

Estos son casos particulares del *teorema de Jordan* que asegura que para cualquier endomorfismo $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ existe una base en la su matriz adquiere una *forma canónica de Jordan* del tipo

$$\begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & O & O & \dots & O \\ O & J_{n_2}(\lambda_2) & O & \dots & O \\ O & O & J_{n_3}(\lambda_3) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Cada uno de los bloques $J_{n_i}(\lambda_i)$ se dice que es una *celda de Jordan*. La forma canónica de Jordan es única salvo reordenar estas celdas. Una notación tan abigarrada hace pensar que la prueba de este teorema es bastante pesada. Así es en la mayoría de los textos. Una excepción es la ingeniosa prueba breve por inducción de [6]. El hecho de que existan demostraciones breves del teorema de Jordan no se traduce en que el algoritmo para hallar la forma canónica de Jordan o la *base de Jordan* en la que se alcanzan sea sencillo. Nosotros aquí solo nos ocuparemos de los casos de dimensiones 2 y 3, y no veremos el algoritmo general ni la prueba del teorema de Jordan. Se deja al lector interesado que consulte en la bibliografía (por ejemplo [6], [13], [22], [14]).

La gracia de la forma canónica de Jordan es que se salvan parcialmente cosas empleadas en las aplicaciones[7]. Concretamente, hay fórmulas para resolver sistemas lineales de ecuaciones diferenciales si la matriz está en forma canónica de Jordan y fórmulas para potencias de estas matrices. Todo queda un poco más feo pero es totalmente explícito. A título de curiosidad, cuando elevamos a n las matrices de los casos no diagonales del Teorema 5.4.1 y del Teorema 5.4.1, se obtiene, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} \\ 0 & \lambda_1^n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_1^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda_1^{n-2} \\ 0 & \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda_1^n \end{pmatrix}.$$

[7]Mi opinión es que los matemáticos sobrevaloramos el interés de la forma canónica de Jordan porque en muchas aplicaciones estamos en el caso diagonalizable (por ejemplo, gracias al teorema espectral) y porque toda matriz se vuelve diagonalizable con una perturbación pequeña.

En las dimensiones 2 y 3, cubiertas por los teoremas anteriores, es fácil decidir a cuál de las formas canónicas corresponde una matriz: basta contar de cuántos vectores propios (linealmente independientes) disponemos.

Para dimensión 2, es de la segunda forma si y solo si no es diagonalizable (es decir, si no hay dos autovectores para formar una base).

Para dimensión 3, cuando no es diagonalizable hay dos posibilidades. La segunda forma se obtendrá cuando tenemos dos vectores propios linealmente independientes y la tercera cuando solo hay uno.

Analicemos los siguientes ejemplos, para convencernos de que es sencillo:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Con cálculos bastante rápidos se deduce que los polinomios característicos son respectivamente $(\lambda+2)^2$, $(1-\lambda)^2(\lambda+1)$ y $(2-\lambda)^3$, resultando entonces un solo autovalor para A_1 y A_3 y dos para A_2. Como A_1+2I no es la matriz nula, A_1 tiene un solo vector propio, salvo múltiplos, y estamos en el caso no diagonalizable del Teorema 5.4.1 con $\lambda_1 = -2$. Para A_2, el autovalor de multiplicidad dos es $\lambda_1 = 1$ y como $(A_2 - I)\vec{v} = \vec{0}$ tiene un conjunto de soluciones de dimensión 1 y, por supuesto, también lo tiene $(A_2 - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$ con $\lambda_2 = -1$, obtenemos la segunda forma del Teorema 5.4.2 con estos λ_j. Finalmente, A_3 solo tiene el autovalor $\lambda_1 = 2$ y $(A_3 - 2I)\vec{v} = \vec{0}$ solo tiene una solución y sus múltiplos, por tanto se tiene la tercera forma del Teorema 5.4.2.

El número de autovalores no determina la forma de Jordan porque ya hemos visto que no determina ni siquiera si es diagonalizable o no. Veamos más ejemplos:

$$A_4 = \begin{pmatrix} -4 & 9 & 3 \\ -4 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_6 = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}.$$

La matriz A_4 solo tiene un autovalor, $\lambda_1 = 2$, pero la dimensión del espacio de soluciones de $(A_4 - 2I)\vec{v} = \vec{0}$ es dos, entonces disponemos de dos autovectores independientes y la forma canónica de Jordan debe ser la segunda del Teorema 5.4.2 con $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Por otro lado, A_5 tiene dos autovalores, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Como existen dos vectores independientes con $(A_5 - I)\vec{v} = \vec{0}$ entonces es diagonalizable (porque a estos le podemos añadir un autovector correspondiente a λ_2 para formar una base). Por tanto, la forma canónica de Jordan es la primera del Teorema 5.4.2 con $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = -1$. La matriz A_6 es solo para ilustrar que el caso complejo no alberga ninguna dificultad adicional, aparte de nuestra posible falta de práctica con estos números. El polinomio característico es λ^2 por tanto, tenemos un solo autovalor $\lambda_1 = 0$. Está claro que A_6 tiene un solo vector propio, salvo múltiplos, porque no es la matriz nula. En conclusión tenemos como forma canónica de Jordan la segunda del Teorema 5.4.1 con $\lambda_1 = 0$.

Algo bien distinto es encontrar la base en la que se obtiene la forma canónica de Jordan, en el caso no diagonalizable. El siguiente resultado da un algoritmo para los casos de dimensión baja que nos ocupan.

Proposición 5.4.3. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ no diagonalizable con $n = 2$ o $n = 3$. Con las siguientes elecciones, se obtiene una base de Jordan $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ válida en cada uno de los casos.*

1) Si $n = 2$, escogemos $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ que no sea vector propio y $\vec{v}_1 = (A - \lambda_1 I)\vec{v}_2$ donde λ_1 es el (único) autovalor de A.

2) Si $n = 3$ y la forma canónica es la segunda del Teorema 5.4.2, escogemos $\vec{v}_2$ que no sea vector propio tal que $(A - \lambda_1 I)^2\vec{v}_2 = \vec{0}$ y $\vec{v}_1 = (A - \lambda_1 I)\vec{v}_2$, donde λ_1 es el autovalor de A con multiplicidad mayor que uno. Completamos con un $\vec{v}_3$ autovector de A que no sea múltiplo de $\vec{v}_1$.

3) Si $n = 3$ y la forma canónica es la tercera del Teorema 5.4.2, escogemos $\vec{v}_3$ tal que $(A - \lambda_1 I)^2\vec{v}_3 \neq \vec{0}$, $\vec{v}_2 = (A - \lambda_1 I)\vec{v}_3$ y $\vec{v}_1 = (A - \lambda_1 I)\vec{v}_2$, donde λ_1 es el autovalor de A.

Este resultado parece arbitrario y difícil de recordar. Quizá dé algo de luz que cuando tenemos una sola celda de Jordan $J_n(\lambda)$ siempre se cumple $(A - \lambda I)^n = O$ y se consigue una base $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ tomando $(A - \lambda I)^{n-1}\vec{v}_n \neq \vec{0}$ y recursivamente $\vec{v}_{j-1} = (A - \lambda I)^{n-1}\vec{v}_j$. El resultado anterior es la aplicación de esta idea a cada una de las celdas de Jordan.

Calculemos una base de Jordan para algunos de los ejemplos anteriores. Se tiene que $\vec{v} = (1, 0)^t$ cumple $(A + 2I)\vec{v} \neq \vec{0}$ y una base posible es $\{(A + 2I)\vec{v}, \vec{v}\}$, esto es, $\{(2, -1)^t, (1, 0)^t\}$. Si uno quisiera comprobar el resultado habría que verificar:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

En el caso de A_2, hay una celda de Jordan de dimensión dos correspondiente a $\lambda_1 = 1$ y se tiene (la última condición asegura que el vector indicado no es autovector)

$$(A_2 - \lambda_1 I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8 & 8 & 4 \\ 8 & -8 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (A_2 - \lambda_1 I)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad (A_2 - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

Por tanto obtenemos una base de Jordan $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ si tomamos $\vec{v}_2 = (1, 0, 2)^t$, $\vec{v}_1 = (A - I)\vec{v}_2 = (1, 1, 0)^t$ y $\vec{v}_3$ un vector propio correspondiente a $\lambda_2 = -1$, por ejemplo $\vec{v}_3 = (0, -1, 1)^t$. Si quisiéramos hacer ahora la comprobación, sería un poco larga y consistiría en verificar

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para A_3 el único valor propio era $\lambda_1 = 2$ y había una única celda de Jordan. El cálculo de $(A_3 - 2I)^2$ lleva a una matriz cuyo único elemento no nulo es el segundo de la primera fila por tanto podemos tomar $\vec{v}_3 = (0, 1, 0)^t$ y completar la base con

$$\vec{v}_2 = (A_3 - 2I)\vec{v}_3 = (3, 0, -1)^t \qquad \text{y} \qquad \vec{v}_1 = (A_3 - 2I)\vec{v}_2 = (1, 0, 0)^t.$$

Como último ejemplo de base de Jordan, hallemos una para A_4. Recordemos que era de la segunda forma del Teorema 5.4.2. No entraña más complicación que ahora $\lambda_1 = \lambda_2$, el único autovalor era 2. La matriz $(A_4 - 2I)^2$ es nula, en sintonía con lo dicho antes sobre las celdas de Jordan y entonces no hay otra restricción sobre $\vec{v}_2$ más que no sea autovector. Por ejemplo, tomemos $\vec{v}_2 = (1,0,0)^t$ que da lugar a $\vec{v}_1 = (A_4 - 2I)\vec{v}_2 = (-6,-4,0)^t$. Como $\vec{v}_3$ hay que escoger un autovector que no sea múltiplo de $\vec{v}_1$, por ejemplo $(1,0,2)^t$. En este caso se cumple

$$\begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} A_4 \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El resto de los ejemplos antes enunciados no aportan ninguna novedad.

Vamos con la prueba de los resultados. Es poco ilustrativa en el sentido de que difícilmente se entrevé una forma de generalizarla a dimensiones superiores para llegar al teorema de Jordan.

Demostración del Teorema 5.4.1. Si A tiene dos autovalores $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces por el Corolario 5.1.5, se tiene la primera forma. Si solo hay un autovalor λ_1, es que el polinomio característico es $(\lambda - \lambda_1)^2$ y la Proposición 5.2.6 asegura que existe $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ unitaria tal que $U^{-1}AU$ es triangular superior. Es decir, hay una base ortonormal $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ en la que $A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$ y $A\vec{v}_2 = \lambda_1\vec{v}_2 + b\vec{v}_1$ para algún $b \in \mathbb{C}$. Si $b = 0$ es de la primera forma y si $b \neq 0$, en la base $\{\vec{v}_1, b^{-1}\vec{v}_2\}$ se tiene la segunda forma porque $A(b^{-1}\vec{v}_2) = \lambda_1 b^{-1}\vec{v}_2 + \vec{v}_1$. □

Demostración del Teorema 5.4.2. Si A tiene tres autovalores entonces es diagonalizable (de la primera forma) por el Corolario 5.1.5.

Consideremos ahora que hay dos autovalores λ_1 y λ_2. Digamos que λ_1 es el de multiplicidad 2 y λ_2 el de multiplicidad uno. Sean $\vec{v}_1$, $\vec{v}_3$ autovectores respectivos y $\vec{v}_2$ linealmente independiente. Se cumple $A\vec{v}_2 = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3$ para ciertos $a, b, c \in \mathbb{C}$ y, añadiendo a esto $A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$, $A\vec{v}_3 = \lambda_2\vec{v}_3$, el polinomio característico de A en la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es $(\lambda_1 - \lambda)(b - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)$. De aquí se deduce $b = \lambda_1$. Definiendo $\vec{w}_2 = \vec{v}_2 + c\vec{v}_3/(\lambda_1 - \lambda_2)$ se tiene $A\vec{w}_2 = a\vec{v}_1 + \lambda_1\vec{w}_2$. Si $a = 0$, hemos diagonalizado en la base $\{\vec{v}_1, \vec{w}_2, \vec{v}_3\}$ y si $a \neq 0$, como $A(a^{-1}\vec{w}_2) = \lambda_1 a^{-1}\vec{w}_2 + \vec{v}_1$, se obtiene la segunda forma canónica del teorema en la base $\{\vec{v}_1, a^{-1}\vec{w}_2, \vec{v}_3\}$.

Por último consideremos el caso en que hay un solo autovalor λ_1, necesariamente de multiplicidad 3. La Proposición 5.2.6 implica que existe una base (de hecho ortonormal) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ en la que

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1, \qquad A\vec{v}_2 = \lambda_1\vec{v}_2 + a\vec{v}_1, \qquad A\vec{v}_3 = \lambda_1\vec{v}_3 + b\vec{v}_1 + c\vec{v}_2. \tag{5.7}$$

Si a, b y c fueran simultáneamente nulos, claramente A sería diagonalizable, por tanto descartamos ese caso.

Si $ac \neq 0$ entonces $\mathcal{B} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{v}_3\}$ con $\vec{w}_1 = ac\vec{v}_1$, $\vec{w}_2 = b\vec{v}_1 + c\vec{v}_2$ es también una base (por ser linealmente independientes). Además se tiene $A\vec{w}_1 = \lambda_1\vec{w}_1$, $A\vec{w}_2 = \lambda_1\vec{w}_2 + \vec{w}_1$, $A\vec{v}_3 = \lambda_1\vec{v}_3 + \vec{w}_2$, lo que prueba que en $\mathcal{B}$ se alcanza la tercera forma canónica del teorema.

Si $a = 0$, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ y sus combinaciones lineales son vectores propios, en particular lo es $\vec{w}_1 = b\vec{v}_1 + c\vec{v}_2$, que cumple $A\vec{v}_3 = \lambda_1\vec{v}_3 + \vec{w}_1$. Si elegimos cualquier otro autovector $\vec{w}_2$ linealmente independiente con $\vec{w}_1$, en la base $\{\vec{w}_1, \vec{v}_3, \vec{w}_2\}$ se alcanza la segunda forma.

Finalmente, si $c = 0$ y $a \neq 0$, usando (5.7), $\vec{w}_3 = b\vec{v}_2 - a\vec{v}_3$ es autovector y es linealmente independiente de $\vec{w}_1 = a\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. Como $A\vec{v}_2 = \lambda_1\vec{v}_2 + \vec{w}_1$, en $\{\vec{w}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_3\}$ se alcanza de nuevo la segunda forma. □

Demostración de la Proposición 5.4.3. Probemos cada apartado por separado.

1) Por definición $A\vec{v}_2 = \lambda_1\vec{v}_2 + \vec{v}_1$ y $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ (ya que $\vec{v}_2$ no es autovector) y solo falta comprobar que $A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$ es autovector. Esto equivale a $(A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = \vec{0}$. Si C es la matriz de cambio de base a la forma canónica de Jordan $J = J_2(\lambda_1)$, se tiene $A = CJC^{-1}$ y se verifica

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = (A - \lambda_1 I)^2\vec{v}_2 = \big(C(J - \lambda_1 I)C^{-1}\big)^2\vec{v}_2 = C(J - \lambda_1 I)^2C^{-1}\vec{v}_2.$$

La última igualdad se sigue escribiendo el cuadrado como un producto por sí mismo. Finalmente, un cálculo prueba $(J - \lambda_1 I)^2 = O$.

2) El vector $\vec{v}_1$ es no nulo porque $\vec{v}_2$ no es vector propio y, por construcción, $(A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = \vec{0}$, de donde $\vec{v}_1$ es autovector. Con ello, $A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$, $A\vec{v}_2 = \lambda_1\vec{v}_2 + \vec{v}_1$ y $A\vec{v}_3 = \lambda_2\vec{v}_3$ (no se excluye $\lambda_2 = \lambda_1$). Sabemos que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_3$ son linealmente independientes, por tanto, para verificar que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es base solo resta comprobar que $\vec{v}_2 = \mu_1\vec{v}_1 + \mu_3\vec{v}_3$ es imposible. Si $\lambda_2 = \lambda_1$ es obvio porque la parte derecha es autovector y $\vec{v}_2$ no lo es. Si $\lambda_2 \neq \lambda_1$, aplicando a la igualdad $(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I)$, se obtiene en el lado derecho $\vec{0}$, mientras que aplicado a $\vec{v}_2$ resulta $(A - \lambda_2 I)\vec{v}_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{v}_1$ que es no nulo.

3) Este caso es similar al primero, salvo que $(A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = \vec{0}$ se deduce ahora de que $J = J_3(\lambda_1)$ verifica $(J - \lambda_1 I)^3 = O$. Para comprobar que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es base tenemos que asegurar que son linealmente independientes. Si $\mu_1\vec{v}_1 + \mu_2\vec{v}_2 + \mu_3\vec{v}_3 = \vec{0}$, aplicando $(A - \lambda_1 I)^2$ se obtiene $\mu_3 = 0$, y $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son linealmente independientes porque uno es autovector y el otro no.

Una observación tranquilizadora final, es que siempre existen unos $\vec{v}_j$ con las propiedades requeridas en el enunciado porque los vectores de la base de Jordan las verifican. □

Exprimiendo el silicio [opcional]. Ya hemos visto que `matlab/octave` confunde matrices no diagonalizables con otras que no lo son, por tanto sin herramientas adicionales no permite hallar la forma canónica de Jordan[8].

[8] Con el paquete de cálculo simbólico para `matlab` dispondrás de un comando `sym` que trasforma una matriz en otra simbólica a la que aplicar `jordan` con la misma sintaxis que `eig`.

Por otro lado, en `sagemath` existe el comando `jordan_form` que produce la forma canónica de Jordan. Si se incluye como argumento `transformation=True` entonces también da la matriz de cambio de base. Por ejemplo, para calcular la matriz A_2 de los ejemplos anteriores usaríamos:

```
# Matriz
A = matrix(3,3,[0,1,1, 3,-2,-1, -4,4,3])
[J,C] = A.jordan_form(transformation=True)

print('Forma canónica')
print(J)
print('Matriz de cambio de base')
print(C)
```

No hay que perder de vista que la forma canónica de Jordan solo es única salvo la ordenación de las celdas, igual que la diagonalización depende del orden de los autovalores, y la base de Jordan no es única, incluso una vez fijada dicha ordenación. El código anterior da

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En nuestra solución pusimos la celda más pequeña al final, en sintonía con el Teorema 5.4.1. Moviendo la primera columna de C al final, la C resultante difiere todavía de la nuestra en el signo de una de las columnas.