```
P += point([(1/2,1/2)], size=300, color='black', zorder=100)
P += line([(1/2,0),(1/2,1/2),(0,1/2)], thickness=3, linestyle='--')
P += text('$P$',(0.6,0.48), fontsize=40)

P.set_aspect_ratio(1)
P.axes(False)
show(P)
```

Cualquiera puede obtener algo similar en un instante con *software* de diseño gráfico. La única ventaja de tenerlo en un programa es la posibilidad de hacer mil y una variaciones ajustando números.

2.5. Suma e intersección de subespacios

Por alguna razón, el tema de esta sección no aparece en la guía docente de la asignatura aunque es común en los cursos de álgebra lineal. Incluyo aquí una discusión con ejemplos en K^n. En relación con esto, supondremos en esta sección sin decirlo cada vez que V y W son subespacios vectoriales de un cierto K^n. Como siempre, en este curso $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ aunque todo funcionaría igual en otros cuerpos.

Las definiciones de la *suma* $V + W$ y la *intersección* $V \cap W$ de V y W son las obvias. Concretamente, $V + W$ está compuesto por los vectores $\vec{v} + \vec{w}$ con $\vec{v} \in V$ y $\vec{w} \in W$ mientras que $V \cap W$ lo está por los vectores que pertenecen simultáneamente a V y W. Es evidente que $V \cap W$ es un subespacio apelando a la Proposición 2.1.1 y algo menos evidente pero similar que $V+W$ también lo es, todo lo que hay que pensar es que $V + W$ coincide con el conjunto de todas las combinaciones lineales posibles de vectores de V y W. Esta última frase nos da un procedimiento para "calcular" $V + W$: si obtenemos bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$ de V y W entonces $V + W = \mathcal{L}(\mathcal{B}_V \cup \mathcal{B}_W)$.

Hay dos maneras principales de presentar un subespacio de K^n, que más o menos se corresponden con los conceptos de imagen y núcleo, una es la que acabamos de usar de dar un conjunto que lo genera, preferiblemente una base, la otra es dar unas ecuaciones $A\vec{x} = \vec{0}$ con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ que determinan los vectores del subespacio. Si tenemos la primera presentación, para obtener $V + W$ solo necesitamos unir los conjuntos que generan V y W, mientras que hallar $V \cap W$ no es tan fácil. Por otro lado, dadas ecuaciones lineales que determinan V y W basta imponerlas simultáneamente para obtener las que determinan $V \cap W$, mientras que no está claro cómo hallar $V+W$.

Después de que leas el número suficiente de veces el párrafo anterior deberías sacar la conclusión de que, con lo que sabemos hasta ahora, el único cabo suelto es hallar un procedimiento para obtener las ecuaciones de un subespacio a partir de una base o de un conjunto finito de vectores que lo genera. Este procedimiento consiste en aplicar eliminación de Gauss a las combinaciones lineales igualadas a un vector genérico y estudiar qué condiciones surgen de que haya solución para los coeficientes. En vez de intentar desentrañar esta frase, es mejor ir directamente a un ejemplo.

Consideramos el subespacio $V \subset \mathbb{R}^4$ con base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ con $\vec{v}_1 = (-1, 2, 2, -3)^t$ y $\vec{v}_2 = (5, -8, -6, 23)^t$ y queremos escribirlo como $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ A\vec{x} = \vec{0}\}$. Para ello aplicamos eliminación de Gauss a $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 = \vec{x}$ entendiéndolo como un sistema en

λ_1 y λ_2.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & x_1 \\ 2 & -8 & x_2 \\ 2 & -6 & x_3 \\ -3 & 23 & x_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & x_1 \\ 0 & 2 & 2x_1+x_2 \\ 0 & 4 & 2x_1+x_3 \\ 0 & 8 & -3x_1+x_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & x_1 \\ 0 & 2 & 2x_1+x_2 \\ 0 & 0 & -2x_1-2x_2+x_3 \\ 0 & 0 & -11x_1-4x_2+x_4 \end{array}\right).$$

Se sigue que la condición necesaria y suficiente para que existan λ_1 y λ_2 con $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 = \vec{x}$, o equivalentemente $\vec{x} \in V$, es que

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ -11x_1 - 4x_2 + x_4, \end{cases} \qquad \text{esto es,} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 0 \\ -11 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para comprobar, es conveniente verificar que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ cumplen las ecuaciones.

Consideremos ahora $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. Entonces

$$V \cap W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \,:\, B\vec{x} = \vec{0}\} \quad \text{con} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 0 \\ -11 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, al resolver la ecuación de W tomando $x_2 = \lambda$, $x_3 = \mu$, $x_4 = \nu$ parámetros arbitrarios, los vectores de W son de la forma $(-\lambda-\mu-\nu, \lambda, \mu, \nu)$, es decir, las combinaciones lineales de $\vec{v}_3 = (-1, 1, 0, 0)^t$, $\vec{v}_4 = (-1, 0, 1, 0)^t$ y $\vec{v}_5 = (-1, 0, 0, 1)^t$. De modo que se tiene $V + W = \mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_5\})$.

Está claro que $V \cap W$ será mayor cuanto más tengan en común V y W y suena sensato que $V + W$ será menor porque habrá pocas sumas que no estén ya en V o en W. El resultado que cuantifica esta situación lleva el nombre del padre más reconocido del álgebra lineal.

Proposición 2.5.1 (fórmula de Grassman)**.** *Si V y W son subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita entonces*[9]

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W).$$

Para terminar, veamos un ejercicio de un examen pasado. Allí se definían los subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} V = \mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}), \\ W = \mathcal{L}(\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}) \end{cases} \quad \text{con} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[9] Esto tiene la misma pinta que la relación $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$ para conjuntos finitos donde # indica el número de elementos (no es un *hashtag*), la cual se prueba partiendo $A \cup B$ en $A \cap B$, en los que están en A pero no en B y en los que están en B pero no en A. En la demostración de la fórmula de Grassman, que no veremos aquí, se utiliza un argumento similar [8] pero con bases de los subespacios.

y se pedía hallar una base de $V \cap W$ y decidir si $V + W = \mathbb{R}^3$. Para lo primero buscamos las ecuaciones de V mediante eliminación de Gauss

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x_1 \\ 2 & 3 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x_1 \\ 0 & -3 & -2x_1 + x_2 \\ 0 & -2 & -x_1 + x_3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x_1 \\ 0 & -3 & -2x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & (x_1 - 2x_2 + 3x_3)/3 \end{array}\right).$$

Así $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$. De la misma forma, para W

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 3 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -2 & -3x_1 + x_2 \\ 0 & -1 & -x_1 + x_3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -2 & -3x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & (x_1 - x_2 + 2x_3)/2 \end{array}\right)$$

y se obtiene $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$. Resolviendo simultáneamente las ecuaciones de V y W se deduce que las soluciones son proporcionales a $(-1, 1, 1)^t$ por tanto este vector constituye una base. La manera larga de mostrar $V + W = \mathbb{R}^3$ es comprobar que la matriz formada por $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ tiene rango 3 (recuérdese la Proposición 2.2.5) y la manera corta es usar la fórmula de Grassman para concluir $\dim(V + W) = 2 + 2 - 1 = 3$.

Exprimiendo el silicio [opcional]. En aras de la brevedad solo veremos un programa para `sagemath` que resuelve el último ejemplo dando bases de $V \cap W$ y de $V + W$. La única instrucción nueva está en la línea 12 y se explica por sí sola.

```
1  # Vectores
2  v1 = vector([1,2,1])
3  v2 = vector([3,3,1])
4  w1 = vector([1,3,1])
5  w2 = vector([1,1,0])
6  # Se utiliza Q^3 en lugar de R^3
7  # para evitar cálculos aproximados
8  Q3 = VectorSpace(QQ,3)
9  V = Q3.span([v1, v2])
10 W = Q3.span([w1, w2])
11 # Construye la intersección y la suma
12 interseccion = V.intersection(W)
13 suma = Q3.span([v1, v2, w1, w2])
14 # Bases
15 print(interseccion.basis())
16 print(suma.basis())
17 # Comprueba que la suma es todo el espacio
18 print(suma == Q3)
```

Como se indica en los comentarios, se utiliza $\mathbb{Q}^3$ en vez de $\mathbb{R}^3$ para forzar el cálculo simbólico.