```
1  # Matriz (compleja) A
2  A = matrix(3,3, [2,1,5+I, 3, 2*I, 4+2*I, 4,4*I-1,3+3*I ])
3  # Construye el espacio de los que anulan A
4  W = A.right_kernel()
5  # Calcula la dimensión
6  print(W.dimension())
7  # Calcula una base
8  print(W.basis())
9
10 print('----------')
11
12 # Matriz que define W_1
13 A = matrix(QQ,2,4,[1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 2])
14 # Construye W_1
15 W1 = A.right_kernel()
16 # Construye W_2
17 Q4 = VectorSpace(QQ,4)
18 v1 = vector([3,1,-2,-2])
19 v2 = vector([0,1,-1,0])
20 W2 = Q4.span([v1, v2])
21 # ¿Son iguales?
22 print(W1==W2)
```

Incluso, como se muestra en la parte final, es posible preguntar directamente si los dos subespacios son iguales (línea 22). Para la construcción de los subespacios se ha usado `right_kernel` (linea 15), que da el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo y `span` que da $\mathcal{L}(C)$ con C un conjunto de vectores (linea 20). Se ha utilizado $\mathbb{Q}^4$ en lugar de $\mathbb{R}^4$ para que no se introduzcan decimales, eso es lo que indica `QQ`. También podría reemplazarse en las líneas 13 y 17 por `SR` que indica *symbolic ring*, algo así como no tengo ganas de especificar dónde trabajo y quiero que las cuentas sean exactas.

2.3. Aplicaciones lineales

Los espacios vectoriales son la estructura subyacente del álgebra lineal, el marco sobre el que se construye, sin embargo el concepto importante que da sentido a este cimiento es el de aplicación lineal.

Dados espacios vectoriales V y W sobre un mismo cuerpo K, una función $f : V \longrightarrow W$ se dice que es una *aplicación lineal* si preserva las combinaciones lineales, es decir, si para $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $\lambda, \mu \in K$ cualesquiera $f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$.

Igual que la Tierra a nuestra escala nos parece plana o al observar una curva con una lupa de muchos aumentos la confundimos con una recta, los incrementos de cualquier función decente de una o varias variables a pequeña escala se aproxima por una aplicación lineal. De esta forma el álgebra lineal se convierte en una teoría bastante universal de las pequeñas variaciones. Por ejemplo, $f(x, y) = \operatorname{sen}(x - y) + e^{\cos(xy)}$ es una función muy rara pero si nos movemos de $\vec{0} = (0, 0)$ a los puntos cercanos $\vec{u} = (0.03, 0.02)$ y $\vec{v} = (0.05, 0.01)$ se tiene que la función incremento $g(x, y) = f(x, y) - f(0, 0)$ verifica $g(\vec{u}) + g(\vec{v}) = 0.049988\ldots$, $g(\vec{u} + \vec{v}) = 0.049971\ldots$ y $g(2\vec{v}) = 0.079909\ldots$, $2g(\vec{v}) = 0.079977\ldots$, los números son muy similares.

Supongamos $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$. Si $\{\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n\}$ es la base canónica de V, cada $\vec{x} \in V$ es de la forma $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t = \sum_j x_j\vec{e}_j$ y se cumplirá $f(\vec{x}) = \sum_j x_j f(\vec{e}_j)$. Dada f, los vectores $f(\vec{e}_j) \in W$ son constantes $f(\vec{e}_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^t$. Por tanto la i-ésima coordenada de $f(\vec{x})$ es $\sum_j a_{ij}x_j$. Con ello hemos probado el siguiente resultado que es la razón de ser de las matrices en álgebra lineal:

Proposición 2.3.1. *Cualquier aplicación lineal* $f : K^n \longrightarrow K^m$ *es de la forma* $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ *con* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. *Las columnas de* A *son los vectores* $f(\vec{e}_j)$ *con* $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ *la base canónica de* K^n.

Una vez más, de cara a los ejemplos de este curso $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ pero nada impide considerar otros cuerpos, siendo $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ las matrices con elementos en dicho cuerpo.

Ahora estamos en condiciones de entender plenamente por qué las matrices se multiplican de manera tan rara. La única manera de usar una aplicación lineal f sobre el resultado de otra aplicación g, lo que se llama *composición* de funciones $f \circ g$, es que g acabe donde comienza f. Digamos $K^{n_1} \xrightarrow{g} K^{n_2} \xrightarrow{f} K^{n_3}$. Si $A \in \mathcal{M}_{n_3\times n_2}(K)$ y $B \in \mathcal{M}_{n_2\times n_1}(K)$ son las matrices de f y g, respectivamente,

$$(f \circ g)(\vec{x}) = f\big(g(\vec{x})\big) = A(B\vec{x}). \tag{2.2}$$

La función $f \circ g$ es también una aplicación lineal, por tanto $(f \circ g)(\vec{x}) = C\vec{x}$. ¿Qué relación hay entre A, B y C? La i-ésima coordenada de $(f\circ g)(\vec{x})$ es $\sum_k a_{ik}m_k$ con m_k la k-ésima coordenada de $B\vec{x}$, que es $\sum_j b_{kj}x_j$. Por consiguiente $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$. Esta es la manera de operar matrices para que indique la composición. Dejándonos llevar por la notación (2.2) quitando paréntesis, decimos que esto es una multiplicación, aunque no comparta muchas propiedades con la habitual.

Para que la prueba de la Proposición 2.3.1 funcione, todo lo que necesitamos es que haya coordenadas y las tendremos siempre que fijemos una base. Es decir, por el mismo precio tenemos:

Proposición 2.3.2. *Sea* $f : V \longrightarrow W$ *una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita. Fijadas bases* $\mathcal{B}_V$ *y* $\mathcal{B}_W$ *de* V *y* W, *las coordenadas de* $\vec{x}$ *en la base* $\mathcal{B}_V$ *y las de* $f(\vec{x})$ *en* $\mathcal{B}_W$ *están relacionadas mediante la multiplicación por cierta matriz. Sus columnas son las coordenadas en* $\mathcal{B}_W$ *de las imágenes de los elementos de* $\mathcal{B}_V$.

Esta matriz se dice que es la *matriz de la aplicación lineal*, aunque en la letra pequeña de nuestra mente deberíamos añadir "una vez fijadas bases".

Veamos un ejemplo en el espacio $\mathbb{R}_2[x]$ de polinomios reales en x de grado a lo más 2 en el que fijamos la base $\{1, x, x^2\}$. Consideremos la función $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ dada por $f(P) = (x-1)P' + P$, con P' la derivada. Es una aplicación lineal porque para $P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(\lambda P + \mu Q)$ es

$$(x-1)(\lambda P' + \mu Q') + \lambda P + \mu Q = \lambda\big((x-1)P' + P\big) + \mu\big((x-1)Q' + Q\big) = \lambda f(P) + \mu f(Q).$$

Calculemos la matriz A de f con la base elegida. Según la Proposición 2.3.2 tenemos que poner en columnas las coordenadas de $f(1)$, $f(x)$ y $f(x^2)$:

$$\begin{array}{lll} f(1) & = 1 & = 1 + 0x + 0x^2 \\ f(x) & = x - 1 + x & = -1 + 2x + 0x^2 \\ f(x^2) & = (x-1)2x + x^2 & = 0 - 2x + 3x^2 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Asociados a una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ se define el *núcleo* de f y la *imagen* de f como los subespacios de V y W dados respectivamente por

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{x} \in V \ : \ f(\vec{x}) = \vec{0}\}, \qquad \mathrm{Im}(f) = \{\vec{y} \in W \ : \ \vec{y} = f(\vec{x}) \text{ con } \vec{x} \in V\}.$$

Este "Ker" es la abreviatura de *kernel*, núcleo en inglés. A veces en textos en español se escribe $\mathrm{Nuc}(f)$ en vez de $\mathrm{Ker}(f)$.

Estos subespacios tienen su traducción en unas propiedades de funciones que seguramente ya conozcas. Si no es el caso, están definidas en el enunciado entre paréntesis. El resultado en sí es muy sencillo, en parte trivial, es más una excusa para recordar o aprender las definiciones.

Proposición 2.3.3. *Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Se cumple:*

a) $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ *si y solo si f es* inyectiva *(valores distintos de $\vec{x}$ dan $f(\vec{x})$ distintos).*

b) $\mathrm{Im}(f) = W$ *si y solo si f es* sobreyectiva *(todo $\vec{w} \in W$ es $f(\vec{v})$ con $\vec{v} \in V$).*

c) $\mathrm{Im}(f) = W$ *y* $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ *si y solo si f es* biyectiva *(inyectiva y sobreyectiva).*

Demostración. Por supuesto, b) y c) son obvias. Para a) basta notar que $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2)$ con $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$ distintos implica $f(\vec{v}) = \vec{0}$ con $\vec{v} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \neq \vec{0}$. Recíprocamente, si $\vec{v} \neq \vec{0}$ está en $\mathrm{Ker}(f)$ podríamos tomar $\vec{x}_1 = \vec{v}$, $\vec{x}_2 = \vec{0}$. □

El cálculo de la dimensión de $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ se deduce del rango de la matriz de f independientemente de las bases elegidas. Esencialmente lo único que hay que hacer para demostrar el siguiente resultado es utilizar coordenadas para pasar todo a K^n donde tenemos el Corolario 2.2.3 y la Proposición 2.2.5.

Proposición 2.3.4. *Sea A la matriz de una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ para ciertas bases (supuestas finitas) de V y W. Se cumple*

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim V - \mathrm{rg}(A) \qquad y \qquad \dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rg}(A).$$

Además los vectores cuyas coordenadas en la base elegida para W corresponden a columnas pivote de A son una base de $\mathrm{Im}(f)$*.*

Demostración. Sean $\mathcal{B}_V = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ y $\mathcal{B}_W = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$ las bases escogidas de V y W. Dado $\vec{u} \in V$ con coordenadas $\vec{c} \in K^n$, esto es $\vec{u} = \sum_j c_j \vec{v}_j$, se cumple $f(\vec{u}) = \vec{0}$ si y solo si $\vec{c} \in V' = \{\vec{x} \in K^n \ : \ A\vec{x} = \vec{0}\}$. Por el Lema 2.2.1 y el Corolario 2.2.3 se deduce $\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim V' = n - \mathrm{rg}(A)$.

De la misma forma, $\vec{w} \in W$ con coordenadas $\vec{d} \in K^m$ cumple $\vec{w} = f(\vec{u})$ si y solo si $\vec{d} = A\vec{c}$, por la Proposición 2.3.1. Equivalentemente si y solo si $\vec{d}$ está en el espacio generado por las columnas de A y basta emplear la Proposición 2.2.5. □

Notando $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ con $n = \dim V$ y $m = \dim W$ y que es $\mathrm{rg}(A)$ es a lo más la menor de estas cantidades, es fácil ver que f no puede ser inyectiva si $\dim V > \dim W$ ni sobreyectiva si $\dim V < \dim W$. Un poco más curioso, y todavía directo a partir del resultado anterior, es:

Corolario 2.3.5. *Suponiendo* $\dim V = \dim W = n < \infty$*, una aplicación lineal* $f : V \longrightarrow W$ *es biyectiva si y solo si su matriz* A *verifica* $\operatorname{rg}(A) = n$*.*

Por la Proposición 1.3.2, $\operatorname{rg}(A) = n$ es el criterio para que A sea invertible. Una aplicación lineal biyectiva $f : V \longrightarrow W$ tiene inversa $f^{-1} : W \longrightarrow V$ que también es aplicación lineal. Una vez fijadas bases, su matriz es la matriz inversa de la matriz de f. De nuevo esto radica en la relación entre composición y producto de matrices como en (2.2).

Practiquemos sobre un ejemplo proveniente de un examen pasado. Queremos hallar bases de $\operatorname{Ker}(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$ para

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \quad \text{dada por} \quad f(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 9 & 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

y decidir si es inyectiva o sobreyectiva.

Intercambiando la primera y la tercera fila la eliminación de Gauss no induce fracciones en la primera columna:

$$A \underset{f_1 \leftrightarrow f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ 9 & 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 \mapsto f_2 - 2f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - 4f_1 \\ f_4 \mapsto f_4 - 9f_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 2 & -13 & 11 \\ 0 & 2 & -28 & 26 \end{pmatrix}$$

y los otros pasos son también sencillos

$$\underset{\substack{f_3 \mapsto f_3 - 2f_2 \\ f_4 \mapsto f_4 - 2f_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -16 & 16 \end{pmatrix} \underset{f_4 \mapsto f_4 - 16f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente $\operatorname{rg}(A) = 3$ y la Proposición 2.3.4 da las dimensiones $\dim \operatorname{Ker}(f) = 1$ y $\dim \operatorname{Im}(f) = 3$. De ello se deduce que f no es inyectiva ni sobreyectiva, esto último requeriría $\dim \operatorname{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^4 = 4$. Eligiendo $x_4 = 1$ en el sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ se obtiene $x_2 = x_3 = 1$, $x_1 = -1$, por tanto $\{(-1, 1, 1, 1)\}$ es una base de $\operatorname{Ker}(f)$. Las columnas pivote de A son las tres primeras y de nuevo por la Proposición 2.3.4 conforman una base de $\operatorname{Im}(f)$.

Vayamos ahora a nuestro viejo amigo el espacio de polinomios $\mathbb{R}_2[x]$ con la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ y hallemos bases de $\operatorname{Ker}(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$ para la aplicación lineal $f(P) = xP'' + 6x \int_0^1 P$ con P'' la derivada segunda.

Comenzamos formando la matriz de f con las coordenadas de $f(1)$, $f(x)$ y $f(x^2)$ en columna, como en un ejemplo anterior:

$$\begin{aligned} f(1) &= 6x \textstyle\int_0^1 1\, dx &&= 0 + 6x + 0x^2 \\ f(x) &= 6x \textstyle\int_0^1 x\, dx &&= 0 + 3x + 0x^2 \\ f(x^2) &= 2x^2 + 6x \textstyle\int_0^1 x^2\, dx &&= 0 + 2x + 2x^2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Moviendo la primera fila al final ya tenemos la forma escalonada, por tanto $\mathrm{rg}(A) = 2$ y se deduce $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$, $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$. Se cumple $A\vec{c} = \vec{0}$ con $\vec{c} = (1, -2, 0)^t$ y estas son las coordenadas de $1-2x+0x^2$, entonces $\{1-2x\}$ es una base de $\mathrm{Ker}(f)$. Las columnas pivote son la primera y la tercera, entonces una base de $\mathrm{Im}(f)$ está formada por los vectores (polinomios) cuyas coordenadas son $(0, 6, 0)^t$ y $(0, 2, 2)^t$, es decir, $\{6x, 2x + 2x^2\}$. Evidentemente la podemos "simplificar" a $\{x, x + x^2\}$. También sería válida $\{x, x^2\}$, pues genera lo mismo. Por la Proposición 2.3.3, f no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

Exprimiendo el silicio [opcional]. A pesar de que esta sección hay un concepto nuevo importante, el de aplicación lineal, los cálculos son similares a los que ya hemos hecho y por tanto no hay demasiado que decir aquí.

Con `matlab/octave` solo recordaremos que si capturamos la salida de `rref` con dos variables, la segunda será asignada con la lista de los números de las columnas pivote. Así en el ejemplo de la aplicación $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ produciríamos una base de $\mathrm{Im}(f)$ con las líneas:

```
% Matriz A
A = [4,2,-1,3; 2,1,0,1; 1,0,3,-2; 9,2,-1,8];
[E, p] = rref(A);
% Una base de Im(f) es:
A(:,p)
```

y lo mismo funcionaría con cualquier otra matriz. La sintaxis de `matlab/octave` permite escribir `A(:,p)` en la última línea para indicar que las filas son arbitrarias y las columnas las que corresponden a los índices de `p`.

Con `sagemath` ya habíamos usado `right_kernel` y ahora encontramos sentido al nombre (por cierto `left_kernel` es esencialmente el núcleo de la traspuesta). Para la imagen se emplea `column_space` que es coherente con la Proposición 2.3.1. De esta forma, el ejemplo de la aplicación $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ se resolvería con:

```
# Matriz A
A = matrix(QQ,4,4,[4,2,-1,3, 2,1,0,1, 1,0,3,-2, 9,2,-1,8])
# Núcleo
nuc = A.right_kernel()
# Imagen
ima = A.column_space()
# Dimensiones
print('dim Ker =', nuc.dimension(),'   dim Im =', ima.dimension())
# Base del núcleo
print(nuc.basis())
# Base de la imagen
print(ima.basis())
```

La base que produce de $\mathrm{Im}(f)$ es más bonita que la nuestra.