la tabla de sumas es exactamente igual que la del extraño cuerpo $\{0, 1, \heartsuit, \clubsuit\}$ de cuatro elementos mencionado en una nota a pie de página. Esto implica que hay una forma no solo de sumar y restar vectores de V sino también de multiplicarlos y dividirlos (salvo por cero). Pues bien, esto es un hecho general. Un teorema asegura que para cualquier cuerpo finito K y cualquier n hay una manera de multiplicar y dividir vectores en K^n que convierte este espacio vectorial en un cuerpo[6].

Antes de que pienses que los matemáticos se preocupan por cosas muy raras, debes saber que en el caso de $K = \{0, 1\}$ esta estructura adicional sobre tiras de bits que permite sumarlas, restarlas, multiplicarlas y dividirlas conservando su longitud, es crucial en la corrección de errores al reproducir soportes digitales como CD, DVD o Blu-ray. Tal corrección no es un lujo, simplemente sin ella no funcionarían porque incluso recién salidos de fábrica, antes de que los rayes, contienen muchos errores de grabación. Si consideras que estos soportes son antediluvianos, debes saber que la corrección de errores también se utilizan en las memorias USB y que alarga su vida útil. Quizá mientras lees estos apuntes se haya averiado alguno de los bits en el *pendrive* donde los almacenas pero no sufrirás de pánico informático hasta que el número de fallos colapse el algoritmo de corrección de errores.

2.2. Bases y dimensión

Pensemos en $\mathbb{R}^2$ que identificamos con todos los puntos o direcciones del plano. Tenemos claro que su dimensión es dos porque necesitamos especificar una x y una y. Alguien con educación matemática elemental nos podría decir que hay cuatro puntos cardinales y nosotros convencerle de que usando números negativos hay redundancia en ellos, 3 pasos al sur son -3 pasos al norte. Todavía hay más redundancia si introducimos las direcciones intermedias de la rosa de los vientos, como el noreste. Aun así, siempre que elijamos dos direcciones que no tengan nada que ver, la redundancia desaparece y obtenemos un sistema válido para hacer mediciones. Por ejemplo, un paso al este y dos al norte son $\sqrt{2}$ pasos al noreste y uno al norte, ya que un un paso de longitud 1 al noreste te lleva a $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

En álgebra lineal los diferentes sistemas de medida constituyen lo que se llaman *bases*. En términos prácticos uno puede preguntarse por qué no fijar uno de esos sistemas convencionalmente, igual que hay un acuerdo en el meridiano de Greenwich. La respuesta es que la conveniencia de uno u otro depende de la situación. En astronomía las elipses de los planetas son muy perfectas cuando se miden desde el centro de masas del Sistema Solar, desde allí la física se vuelve más fácil pero a la hora de hacer observaciones la mayor parte de los telescopios están en la Tierra y es más natural medir en ese sistema rotatorio en el que las órbitas de los planetas son curvas complicadas.

Un ejemplo en el ámbito de la ingeniería es que emplear un sistema u otro al

[6] Un pionero en la introducción de estos cuerpos finitos fue É. Galois, un matemático de vida azarosa en tiempos de la restauración monárquica francesa que murió en un duelo con tan solo 20 años. La notación `GF` que emplea `sagemath` son las iniciales de *Galois field*.

describir una señal de audio sirve para separar algunas de sus características como el ruido o los graves o los agudos, que permitan procesarla adecuadamente.

Lo primero que haremos es dar un nombre a la situación en la que unos vectores no ofrezcan información redundante, esto es, que ninguno se despeje en función de los otros.

En un espacio vectorial V sobre K se dice que los vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ son *linealmente independientes* si la única solución de

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0} \tag{2.1}$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ es $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ (aunque es irrelevante en este curso, para una conjunto infinito de vectores, la independencia lineal se define pidiendo que ocurra para cualquiera de sus subconjuntos finitos).

En un alarde de originalidad, cuando hay más soluciones se dice que los vectores son *linealmente dependientes*. En este caso algún $\lambda_i \neq 0$ y se despeja $\vec{v}_i$ en términos del resto de los vectores por medio de $\vec{v}_i = -\sum_{j\neq i} \lambda_j/\lambda_i \vec{v}_j$.

Seguro que no asombra que el estudio de la dependencia o independencia lineal se reduzca habitualmente a discutir un sistema homogéneo.

Por ejemplo, estudiemos si los vectores de $\mathbb{R}^3$

$$\vec{v}_1 = (2, 1, -1)^t, \qquad \vec{v}_2 = (3, 0, 1)^t, \qquad \text{y} \qquad \vec{v}_3 = (-1, 4, -7)^t$$

son linealmente independientes. La ecuación (2.1) se puede escribir como

$$A\vec{\lambda} = \vec{0} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -7 \end{pmatrix}, \quad \vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

En general en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ el sistema será $A\vec{\lambda} = \vec{0}$ con A la matriz formada por los vectores en columna. Es fácil ver que $\mathrm{rg}(A) = 2$, concretamente aplicando eliminación de Gauss intercambiando las dos primeras filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto el sistema tiene infinitas soluciones y los vectores son linealmente dependientes.

La dependencia lineal de dos vectores se reduce a comprobar que uno es múltiplo del otro. En $\mathbb{R}^n$ esto normalmente se decide a ojo mientras que en $\mathbb{C}^n$ quizá nuestro ojo tenga que trabajar más y pedir ayuda a nuestra mano. Por ejemplo, los vectores $\vec{v}_1 = (1+i, 1+2i, i-1)^t$ y $\vec{v}_2 = (1+2i, 3i-1, i-2)^t$ de $\mathbb{C}^3$ son linealmente dependientes si y solo si $\vec{v}_2 = \frac{1+2i}{1+i}\vec{v}_1$, para que cuadren las primeras coordenadas, y un cálculo muestra que esta relación se cumple.

Consideremos ahora los polinomios $P_1 = 1 + x + x^2$, $P_2 = 3 + 5x + x^2$, $P_3 = 7 - x^2 + x^3$ del espacio vectorial de polinomios reales en x. La ecuación relevante es

$$\lambda_1(1 + x + x^2) + \lambda_2(3 + 5x + x^2) + \lambda_3(7 - x^2 + x^3) = 0 \qquad \text{con} \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

Agrupando los términos del mismo grado,

$$(\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3) + (\lambda_1 + 5\lambda_2)x + (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)x^2 + \lambda_3 x^3 = 0.$$

El polinomio nulo es el que tiene todos sus coeficientes nulos, por tanto llegamos al sistema homogéneo

$$A\vec{\lambda} = \vec{0} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Está claro que $\text{rg}(A) = 3$ simplemente considerando las tres últimas filas (el rango no puede ser mayor que tres). Entonces el sistema es compatible determinado, solo tiene la solución trivial, y los polinomios P_1, P_2, P_3 resultan ser linealmente independientes.

Las expresiones como las del primer miembro de (2.1) se dice que son *combinaciones lineales* de los vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. El conjunto de todas las combinaciones lineales lo denotaremos con $\mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\})$. Está claro tras la Proposición 2.1.1 que forman un subespacio W de V. Se dice que $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ genera W o que es un *sistema de generadores* de W. Si C es un conjunto infinito se define $\mathcal{L}(C)$ como la unión de los $\mathcal{L}(C')$ para todos los subconjuntos finitos $C' \subset C$. De esta forma se eliminan problemas de convergencia que pertenecen al negociado de los cursos de análisis.

Con ello ya estamos preparados para dar una definición matemática de base que concrete la idea de un sistema de medida, una elección de puntos cardinales, en el que no hay redundancia y que permite representar cualquier elemento, cualquier observación, en nuestro espacio.

Dado un espacio vectorial V, se dice que un conjunto $\mathcal{B} \subset V$ es una *base* de V si los vectores de $\mathcal{B}$ son linealmente independientes y $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = V$.

Fijada una base finita[7] $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ de un espacio vectorial V cada vector $\vec{u} \in V$ se escribe de forma única como $\vec{u} = \lambda_1\vec{v}_1 + \dots + \lambda_n\vec{v}_n$ porque si hubiera dos combinaciones lineales que dieran $\vec{u}$, al restarlas llegaríamos a algo del tipo (2.1) que contradiría la independencia lineal. Estos λ_j se dice que son las *coordenadas* de $\vec{u}$ en la base $\mathcal{B}$ e incluso a veces se escribe, abusando un poco de la notación, $\vec{u} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t$ especificando la base en la que trabajamos.

[7]En este curso solo nos ocuparemos de hacer cálculos con bases finitas, sin embargo hay espacios de gran interés en ingeniería que se salen de este esquema y aparecerán en otras asignaturas. Desde el punto de vista matemático son tema de estudio del *análisis funcional*, a medio camino entre el álgebra y el análisis. Su desarrollo estuvo inicialmente a la formalización de la física cuántica.

En $\mathbb{R}^2$ la base más sencilla es $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ con $\vec{e}_1 = (1,0)^t$ y $\vec{e}_2 = (0,1)^t$, llamada la *base canónica* que se extiende a $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ (y en general a K^n) de la manera obvia tomando $\vec{e}_i$ con un 1 en el lugar i y ceros en el resto. Volviendo al ejemplo del principio de la sección, el vector $\vec{u} = (1,2)^t \in \mathbb{R}^2$ que corresponde a un paso al este y dos al norte es $\vec{u} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$. Sin embargo en la base $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ con $\vec{v}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^t$ y $\vec{v}_2 = (0,1)^t$, que corresponde a usar el noreste y el norte, se tiene $\vec{u} = \sqrt{2}\vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Identificando $\vec{u}$ con sus coordenadas, $\vec{u}$ es $(1,2)^t$ cuando empleamos la base canónica y es $(\sqrt{2}, 1)^t$ cuando usamos la base $\mathcal{B}'$.

Si tenemos una base con n elementos ($\neq \infty$) lo que hagamos con las combinaciones lineales de vectores potencialmente raros (polinomios, señales, etc.) se traduce fielmente en lo que hagamos con sus vectores de coordenadas que están en K^n, que en el curso serán los familiares $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$. Por si no está claro, aquí va como enunciado teórico:

Lema 2.2.1. *Sea V un espacio vectorial sobre K con una base finita de n elementos y sean $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m \in K^n$ los vectores formados por las coordenadas de $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m \in V$. Entonces $\sum_j \lambda_j \vec{u}_j = \vec{0}$ con $\lambda_j \in K$ si y solo si $\sum_j \lambda_j \vec{c}_j = \vec{0}$.*

El número de grados de libertad de un sistema físico es independiente de la manera en que lo describamos. El análogo en el contexto de los espacios vectoriales es el siguiente resultado-definición:

Proposición 2.2.2. *Todas las bases de un espacio vectorial V tienen el mismo número de elementos. Tal número se llama* dimensión *de V y se indica con* $\dim V$.

Incidiendo en un comentario anterior, podría ocurrir $\dim V = \infty$ pero no vamos a hallar bases en este curso cuando ocurra esto. Si te empeñas mucho en tener un ejemplo, $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ es una base del espacio de polinomios.

Si ahora leemos con esta notación y con ojos de ver el Teorema 1.2.2, nos percataremos de que nos asegura lo siguiente:

Corolario 2.2.3. *Sea $V = \{\vec{x} \in K^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$ con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Se cumple $\dim V = n - \operatorname{rg}(A)$.*

En este curso $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ aunque el resultado tiene validez en cualquier cuerpo ya que sumas, restas, multiplicaciones y divisiones es todo lo que necesitamos para hacer y deshacer las transformaciones elementales de la eliminación de Gauss. Una base de V es $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-r}\}$ con $\vec{v}_j$ como en el Teorema 1.2.2. Obviamente $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = V$ y los $\vec{v}_j$ son linealmente independientes porque en otro caso habría diferentes posibles elecciones de λ_j dando $\vec{x} = \vec{0}$.

En la práctica, a menudo sabemos la dimensión o bien por este corolario o porque existe una base fácil. Con ello no es necesario comprobar que un candidato a base genera.

Proposición 2.2.4. *Si V es un espacio vectorial con $\dim V = n < \infty$, cualesquiera n vectores linealmente independientes forman una base.*

Hay una interpretación del rango en términos de dimensiones distinta de la del Corolario 2.2.3 que implica que el rango de una matriz y de su traspuesta coinciden, lo cual suena muy sorprendente porque los cálculos de la eliminación de Gauss sobre A y A^t no guardan ninguna relación. Entender el milagro requiere leer la demostración. Lo hagas o no, conviene que recuerdes a partir de ejemplos anteriores que para cualquier matriz A el producto $A\vec{\lambda}$ es la combinación lineal $\lambda_1\vec{c}_1 + \dots \lambda_n\vec{c}_n$ con $\vec{c}_j$ las columnas de A.

Proposición 2.2.5. *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ entonces $\operatorname{rg}(A)$ es igual a la dimensión del espacio generado por sus columnas y también a la del espacio generado por sus filas. En particular $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^t)$.*

Las pruebas de las proposiciones anteriores son sencillas e ilustrativas pero las pospondremos en favor de presentar cuanto antes algunos ejemplos.

Como primer ejemplo, calculemos la dimensión y una base del subespacio de $\mathbb{C}^3$

$$W = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^3 \,:\, A\vec{x} = \vec{0}\} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5+i \\ 3 & 2i & 4+2i \\ 4 & -1+4i & 3+3i \end{pmatrix}.$$

Un truco (no obligatorio) para evitar a toda costa que aparezcan fracciones al aplicar eliminación de Gauss es multiplicar la primera fila por 3 y la segunda por 2 antes de empezar, tras lo cual procedemos con

$$\underset{\substack{f_2\mapsto f_2-f_1\\ f_3\mapsto f_3-2f_1/3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 15+3i \\ 0 & -3+4i & -7+i \\ 0 & -3+4i & -7+i \end{pmatrix} \underset{\substack{f_1\mapsto f_1/3\\ f_3\mapsto f_3-f_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5+i \\ 0 & -3+4i & -7+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De aquí $\operatorname{rg}(A) = 2$ y el Corolario 2.2.3 implica $\dim W = 3 - 2 = 1$. Una base estará formada por cualquier vector no nulo de W. Tomando[8] $x_3 = 1$ se deduce de la forma escalonada $x_2 = -1 - i$ y $x_1 = -2$ que produce $\mathcal{B} = \{(-2, -1-i, 1)^t\}$.

Vamos ahora a presentar un enunciado con aspecto bien diferente en el que se utilizan las mismas herramientas. Queremos comprobar que los siguientes subespacios $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$ son en realidad iguales:

$$W_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \,:\, \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{matrix} \right\} \quad \text{y} \quad W_2 = \mathcal{L}\big(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}\big)$$

con $\vec{v}_1 = (3, 1, -2, -2)^t$ y $\vec{v}_2 = (0, 1, -1, 0)^t$.

Un paso de eliminación de Gauss muestra que la matriz A del sistema en W_1 tiene $\operatorname{rg}(A) = 2$ por tanto $\dim W_1 = 4-2 = 2$. Además $A\vec{v}_1 = A\vec{v}_2 = \vec{0}$ implica $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in W_1$. Si mostramos que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son linealmente independientes, serán base tanto de W_1

[8] Aquí están las cosas preparadas para que $-7 + i$ sea "divisible" por $-3 + 4i$. Si no fuera así y quisiéramos evitar las fracciones y minimizar las cuentas con números complejos, una elección natural sería $x_3 = -3 + 4i$.

como de W_2 y se tendrá $W_1 = W_2$. Ahora bien, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ no son uno múltiplo del otro, por tanto son linealmente independientes.

El siguiente ejemplo es un problema de un antiguo examen. Es muy sencillo y lo único que podría asustarte es que habla de un espacio de matrices. Se considera

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda - \mu & 2\lambda \\ \mu & \lambda + \mu \end{pmatrix} \,:\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo que se pedía en el examen era mostrar que es un subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y calcular su dimensión. Se tiene

$$\begin{pmatrix} \lambda - \mu & 2\lambda \\ \mu & \lambda + \mu \end{pmatrix} = \lambda A_1 + \mu A_2 \qquad \text{con} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es decir $W = \mathcal{L}\big(\{A_1, A_2\}\big)$ y el subespacio generado por dos vectores (en nuestro caso con aspecto de matriz) es obviamente subespacio (si te empeñas apela a la Proposición 2.1.1). Está claro que A_1 y A_2 son linealmente independientes ya que $\lambda A_1 + \mu A_2 = O$ implica $\lambda = \mu = 0$, por tanto $\{A_1, A_2\}$ es base y $\dim W = 2$.

Siguiendo con problemas de examen que no involucran subespacios de $\mathbb{R}^n$, en uno de ellos se pedía mostrar que $\mathcal{B} = \big\{1, x+1, (x+1)^2\big\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$, el espacio vectorial de polinomios reales en x de grado a lo más 2, y calcular las coordenadas de $P = 7 + 4x + x^2$ en dicha base. Claramente $\mathbb{R}_2[x] = \mathcal{L}\big(\{1, x, x^2\}\big)$ y 1, x, x^2 son linealmente independientes (un polinomio es nulo cuando los coeficientes de x^j lo son) por tanto $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$. Entonces usando la Proposición 2.2.4, basta probar que los elementos de $\mathcal{B}$ son linealmente independientes. Operando y agrupando por grados se tiene

$$\lambda_1 + \lambda_2(x+1) + \lambda_3(x+1)^2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + (\lambda_2 + 2\lambda_3)x + \lambda_3 x^2.$$

Este es el polinomio nulo solo si $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_2 + 2\lambda_3 = \lambda_3 = 0$, lo que implica $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Para hallar las coordenadas de P lo igualamos a esta combinación lineal, resultando el sistema $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7$, $\lambda_2 + 2\lambda_3 = 4$, $\lambda_3 = 1$ cuya solución es $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (4, 2, 1)$. Estas son las coordenadas de P en la base $\mathcal{B}$.

Terminamos con las pruebas que faltaban.

Demostración de la Proposición 2.2.2. Veamos que es imposible que haya dos bases $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m\}$ con $m > n$.

Por la definición de base, $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = V$, en particular existen coeficientes a_{ij} tales que

$$\vec{c}_j = a_{1j}\vec{b}_1 + a_{2j}\vec{b}_2 + \cdots + a_{nj}\vec{b}_n, \qquad 1 \le j \le m.$$

Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$, necesariamente $\text{rg}(A) \le n$ (a lo más un pivote por fila). De este modo, si $n < m$ el sistema $A\vec{\lambda} = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones y existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ no todos nulos con $\sum_j a_{ij}\lambda_j = 0$. Esto implica $\sum_j \lambda_j \vec{c}_j = \vec{0}$ y contradice la independencia lineal de los $\vec{c}_j$. $\square$

Demostración de la Proposición 2.2.4. Si $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ son linealmente independientes hay que ver que para cualquier $\vec{u} \in V$ se tiene $\vec{u} \in \mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\})$. Procediendo como en la demostración anterior con $m = n+1$ y $\vec{c}_1 = \vec{v}_1, \dots \ \vec{c}_n = \vec{v}_n$, $\vec{c}_{n+1} = \vec{u}$, se obtiene $\sum_j \lambda_j \vec{c}_j = \vec{0}$ con λ_j no todos nulos. Si $\lambda_{n+1} \neq 0$ se deduce $\vec{u} = -\lambda_{n+1}^{-1} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{c}_j \in \mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\})$. El caso $\lambda_{n+1} = 0$ es imposible porque implicaría que $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ son linealmente dependientes. □

Demostración de la Proposición 2.2.5. El Teorema 1.2.2 asegura que si A' es la matriz formada por las $\mathrm{rg}(A)$ columnas pivote de A, el sistema $A'\vec{\lambda} = \vec{0}$ tiene solución única trivial y si añadimos alguna otra columna hay soluciones no triviales, por tanto $\mathrm{rg}(A)$ es la dimensión del espacio generado por las columnas.

Por otro lado, las trasformaciones elementales preservan el espacio generado por las filas, no cambian el conjunto de todas sus combinaciones lineales, por tanto su dimensión es la misma que la del espacio generado por las filas de la forma escalonada reducida. Esta claro que tal dimensión es el número de filas no nulas, la cual coincide con el número de escalones $\mathrm{rg}(A)$. □

Exprimiendo el silicio [opcional]. Veamos cómo resolver computacionalmente los dos primeros ejemplos que siguen a la Proposición 2.2.4. En la salida se muestra una fila de guiones separando ambos ejemplos.

Con `matlab/octave` una posibilidad es el siguiente código:

```
1  % Matriz (compleja) A
2  A = [2,1,5+I; 3, 2*I, 4+2*I; 4,4*I-1,3+3*I ];
3  % La dimensión es n-rg(A). n = size(A,1)
4  size(A,1)-rank(A)
5  % Una base es la única columna de
6  null(A)
7
8  disp('----------')
9
10 % Matriz que define W_1
11 A = [1, 1, 1, 1; 1, -1, -1, 2];
12 % Vectores que definen W_2
13 v1 = [3;1;-2;-2]
14 v2 = [0;1;-1;0]
15 % Este producto es la matriz nula por tanto
16 % W_2 está incluido en W_1
17 A*[v1, v2]
18 % Una base de W_1 son las columnas de
19 null(A)
20 % Si añadimos v1 y v2 el rango es dos
21 rank( [null(A) v1 v2])
22 % Por tanto v1 y v2 son combinaciones lineales
23 % de la base de W_1 y se concluye que
24 % W_1 está incluido en W_2.
```

Todo está explicado en los comentarios y los comandos ya han aparecido antes con la excepción de `size(A,1)` que da el número de filas de la matriz `A`, el de columnas es `size(A,2)`, y de `disp` que muestra (*display*) algo en la salida.

Quizá las líneas finales merezcan una explicación: Las columnas $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ de la matriz $M =$ `null(A)` dan una base de W_1 por tanto $M\vec{\lambda} = \vec{0}$ tiene solución única y $\mathrm{rg}(M) = 2$. Si el rango de la línea 21 se mantiene en 2, entonces $M\vec{\lambda} = \vec{v}_1$ y $M\vec{\lambda} = \vec{v}_2$ también tendrán solución y estos vectores se expresan como combinación lineal de $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$.

En `sagemath` hay comandos especiales para calcular dimensiones y bases.

```
1  # Matriz (compleja) A
2  A = matrix(3,3, [2,1,5+I, 3, 2*I, 4+2*I, 4,4*I-1,3+3*I ])
3  # Construye el espacio de los que anulan A
4  W = A.right_kernel()
5  # Calcula la dimensión
6  print(W.dimension())
7  # Calcula una base
8  print(W.basis())
9
10 print('----------')
11
12 # Matriz que define W_1
13 A = matrix(QQ,2,4,[1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 2])
14 # Construye W_1
15 W1 = A.right_kernel()
16 # Construye W_2
17 Q4 = VectorSpace(QQ,4)
18 v1 = vector([3,1,-2,-2])
19 v2 = vector([0,1,-1,0])
20 W2 = Q4.span([v1, v2])
21 # ¿Son iguales?
22 print(W1==W2)
```

Incluso, como se muestra en la parte final, es posible preguntar directamente si los dos subespacios son iguales (línea 22). Para la construcción de los subespacios se ha usado `right_kernel` (linea 15), que da el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo y `span` que da $\mathcal{L}(C)$ con C un conjunto de vectores (linea 20). Se ha utilizado $\mathbb{Q}^4$ en lugar de $\mathbb{R}^4$ para que no se introduzcan decimales, eso es lo que indica `QQ`. También podría reemplazarse en las líneas 13 y 17 por `SR` que indica *symbolic ring*, algo así como no tengo ganas de especificar dónde trabajo y quiero que las cuentas sean exactas.