Notación y repaso

Si estás ahí sentado después de haber pasado por un proceso de admisión con vistas a ser ingeniero, seguro que has oído hablar de matrices y vectores. No es necesario que recuerdes demasiado ya que la teoría se construirá desde el principio para que tenga mayor generalidad. Aquí vamos a ver una brevísima y somera introducción sobre todo para fijar la notación.

0.1. Matrices

Una *matriz* $m \times n$ es solo una tabla de números con m filas y n columnas ($\mathsf{altura} \times \mathsf{base}$). En este curso los números serán reales la mayor parte del tiempo pero los números complejos no solo existen en ingeniería sino que son importantes, por tanto no nos olvidaremos del todo de ellos. Por cierto, en algunas aplicaciones es interesante considerar matrices más exóticas, por ejemplo de bits sujetos a operaciones especiales. Denotaremos con $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las matrices reales $m \times n$. Si uno permite números complejos, escribiremos $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y $\mathcal{M}_{m\times n}$ si no tenemos interés en distinguir los dos casos (aunque a partir del segundo capítulo preferiremos $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ a $\mathcal{M}_{m\times n}$). Las *matrices cuadradas*, con $m = n$, son más importantes que el resto y se suele abreviar $m \times n$ por m en la notación. Por ejemplo $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ son las matrices reales 2×2. Como $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, se tiene $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$.

Las matrices se suelen denotar con letras mayúsculas y sus *elementos*, los números que la integran, con la letra minúscula correspondiente, indicando con subíndices la fila y la columna, en este orden. Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad a_{12} = 3, \quad a_{22} = 11, \quad a_{23} = 13.$$

Muchas veces se escribe $A = (a_{ij})$, o $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{2,3}$ si se quiere indicar el número de filas y columnas.

La matriz que tiene todos sus elementos cero se conoce como *matriz nula* y a veces se denota con O. Entre las matrices cuadradas destacan las *diagonales* cuyo nombre se explica por sí solo: son las matrices D con $d_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$. Si además $d_{ii} = 1$ para cada i, se dice que tenemos la *matriz identidad*, denotada por I (o por I_n si se quiere indicar su tamaño).

Una operación sobre las matrices que a este nivel parecerá arbitraria[1] es la *trasposición* que consiste en intercambiar filas y columnas. De esta forma convierte matrices de $\mathcal{M}_{m\times n}$ en matrices de $\mathcal{M}_{n\times m}$. Se suele indicar con el superíndice t. Una cosa curiosa es que para matrices complejas la operación relevante, en relación con la nota a pie de página que quizá acabas de leer, no es la trasposición sino trasponer y después conjugar. Los físicos lo suelen indicar con el superíndice † (*dagger*, daga en inglés) y como se parece mucho a la t la usaré en las notas aunque sea muy poco frecuente en matemáticas. Por supuesto, para matrices de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ da igual aplicar t que †. Un par de ejemplos son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A^t = A^\dagger = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad B^t = \begin{pmatrix} 1+i & -i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}, \; B^\dagger = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$$

donde $i = \sqrt{-1}$.

La suma de dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ se lleva a cabo de la manera obvia sumando elemento a elemento. La multiplicación de dos matrices solo se define si el número de columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times l}$ entonces $AB \in \mathcal{M}_{m\times l}$. El elemento ij del producto se calcula con la fórmula $\sum_k a_{ik}b_{kj}$. Esto equivale a decir que se hace una operación como la del producto escalar habitual de la fila i de A por la columna j de B y el resultado da lugar al elemento ij. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Te preguntarás cómo a alguien en su sano juicio se le puede ocurrir que esta es una manera sensata de multiplicar tablas. La respuesta está relacionada con la composición de funciones ya que en álgebra lineal las matrices más que tablas a secas, son tablas de coeficientes de funciones de cierto tipo. Volveremos sobre ello en un futuro capítulo. Ahora si quieres apaciguar un poco tu curiosidad, considera

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} y_1 &= b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ y_2 &= b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \end{aligned}$$

y expresa x_1 y x_2 en términos de z_1 y z_2 sustituyendo. Obtendrás que los coeficientes vienen dados por el producto de matrices $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$ y $B = (b_{ij})_{i,j=1}^2$.

Con respecto a la suma y el producto la trasposición cumple

$$(A+B)^t = A^t + B^t, \qquad \text{y} \qquad (AB)^t = B^tA^t.$$

[1] Si tienes curiosidad, aquí va el *spoiler*: la gracia de esta operación es que tiene que ver con los productos escalares, incluso en un contexto más general del que conoces.

Lo mismo es cierto reemplazando t por †. El cambio de orden en la segunda fórmula no es ninguna tontería porque si por ejemplo $A, B \in \mathcal{M}_n$ es muy inusual que AB y BA coincidan.

Dicho sea de paso, las matrices O e I son claramente elementos neutros de la suma y de la multiplicación de matrices cuadradas. Es decir, $A + O = O + A = A$ y $AI = IA = A$.