Modelo 1 PRIMER PARCIAL DE ÁLGEBRA LINEAL 10 de noviembre de 2020

Apellidos y Nombre:..

.... **DNI:**....................................

1) [4 puntos] Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Un acierto cuenta 1 y un fallo descuenta 1/3. No contestar no penaliza.

- V. ☐ F. ☒ Para todo par de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con $\det(A) = \det(B) = 0$ se cumple $\det(A+B) = 0$. Por ejemplo $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con $a_{11} = a_{12} = 1$, $a_{21} = a_{22} = 0$ y $B = A^t$.

- V. ☐ F. ☒ Un sistema lineal con 2020 ecuaciones y 2021 incógnitas siempre tiene infinitas soluciones. Podría contener $x_1 + \cdots + x_{2021} = 1$ y $x_1 + \cdots + x_{2021} = 0$.

- V. ☒ F. ☐ Si $T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es cierta matriz constante, las matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que verifican $MT = M^t$ forman un espacio vectorial. La relación se preserva por combinaciones lineales ya que $(\lambda M_1 + \mu M_2)T = \lambda M_1 T + \mu M_2 T$ y $(\lambda M_1 + \mu M_2)^t = \lambda M_1^t + \mu M_2^t$.

- V. ☒ F. ☐ La desigualdad $\text{rg}(AB) \le \text{rg}(A)$ se verifica para cualquier $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Las columnas de AB son combinación lineal de las de A.

2) [3 puntos] Calcula la dimensión del núcleo y de la imagen de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabemos por la teoría $\dim \mathsf{Im}(f) = \mathsf{rg}(A)$ y $\dim \mathsf{Ker}(f) = \dim V - \mathsf{rg}(A)$ por tanto basta hallar $\mathsf{rg}(A)$. Con las transformaciones elementales $f_3 \mapsto f_3 - f_1$ y $f_3 \mapsto f_3 - f_2$ (o de un golpe $f_3 \mapsto f_3 - f_1 - f_2$) la última fila se anula. Entonces

$$\mathsf{rg}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

porque las dos primeras columnas (o filas) son linealmente independientes ya que no son proporcionales. Por tanto $\dim \mathsf{Im}(f) = 2$ y $\dim \mathsf{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \mathsf{rg}(A) = 4 - 2 = 2$.

(sigue por detrás)

3) [3 puntos] Halla todas las soluciones del sistema (con $i = \sqrt{-1}$)

$$\begin{cases} x - iy + z & = & 3 + i, \\ x + iy + (1-i)z & = & 2 + i. \end{cases}$$

Tras la transformación elemental $f_2 \mapsto f_2 - f_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 1 & 3+i \\ 0 & 2i & -i & -1 \end{array}\right) \underset{f_2 \mapsto \frac{f_2}{2i}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 1 & 3+i \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{array}\right) \underset{f_1 \mapsto f_1 + i f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 - \frac{i}{2} & \frac{5}{2} + i \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{array}\right).$$

Tomando $z = \lambda$ (la tercera es la columna que no es pivote), se tiene

$$x = \frac{5}{2} + i + \big(\frac{i}{2} - 1\big)\lambda, \qquad y = \frac{i}{2} + \frac{\lambda}{2}, \qquad z = \lambda.$$

Modelo 2 PRIMER PARCIAL DE ÁLGEBRA LINEAL 10 de noviembre de 2020

Apellidos y Nombre:...
.... **DNI:**.......................................

1) [3 puntos] Calcula la dimensión del núcleo y de la imagen de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabemos por la teoría $\dim \mathsf{Im}(f) = \mathsf{rg}(A)$ y $\dim \mathsf{Ker}(f) = \dim V - \mathsf{rg}(A)$ por tanto basta hallar $\mathsf{rg}(A)$. Con las transformaciones elementales $f_3 \mapsto f_3 - f_1$ y $f_3 \mapsto f_3 - f_2$ (o de un golpe $f_3 \mapsto f_3 - f_1 - f_2$) la última fila se anula. Entonces

$$\mathsf{rg}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

porque las dos primeras columnas (o filas) son linealmente independientes ya que no son proporcionales. Por tanto $\dim \mathsf{Im}(f) = 2$ y $\dim \mathsf{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \mathsf{rg}(A) = 4 - 2 = 2$.

(sigue por detrás)

2) [3 puntos] Halla todas las soluciones del sistema (con $i = \sqrt{-1}$)

$$\begin{cases} x - iy + z & = & 3 + i, \\ x + iy + (1-i)z & = & 2 + i. \end{cases}$$

Tras la transformación elemental $f_2 \mapsto f_2 - f_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 1 & 3+i \\ 0 & 2i & -i & -1 \end{array}\right) \underset{f_2 \mapsto \frac{f_2}{2i}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 1 & 3+i \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{array}\right) \underset{f_1 \mapsto f_1 + if_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-\frac{i}{2} & \frac{5}{2}+i \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{array}\right).$$

Tomando $z = \lambda$ (la tercera es la columna que no es pivote), se tiene

$$x = \frac{5}{2} + i + \big(\frac{i}{2} - 1\big)\lambda, \qquad y = \frac{i}{2} + \frac{\lambda}{2}, \qquad z = \lambda.$$

3) [4 puntos] Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Un acierto cuenta 1 y un fallo descuenta 1/3. No contestar no penaliza.

- V. $\boxed{}$ F. $\boxed{X}$ Para todo par de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con $\det(A) = \det(B) = 0$ se cumple $\det(A+B) = 0$. Por ejemplo $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con $a_{11} = a_{12} = 1$, $a_{21} = a_{22} = 0$ y $B = A^t$.

- V. $\boxed{}$ F. $\boxed{X}$ Un sistema lineal con 2020 ecuaciones y 2021 incógnitas siempre tiene infinitas soluciones. Podría contener $x_1 + \cdots + x_{2021} = 1$ y $x_1 + \cdots + x_{2021} = 0$.

- V. $\boxed{X}$ F. $\boxed{}$ Si $T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es cierta matriz constante, las matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que verifican $MT = M^t$ forman un espacio vectorial. La relación se preserva por combinaciones lineales ya que $(\lambda M_1 + \mu M_2)T = \lambda M_1 T + \mu M_2 T$ y $(\lambda M_1 + \mu M_2)^t = \lambda M_1^t + \mu M_2^t$.

- V. $\boxed{X}$ F. $\boxed{}$ La desigualdad $\text{rg}(AB) \le \text{rg}(A)$ se verifica para cualquier $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Las columnas de AB son combinación lineal de las de A.

Modelo 3 PRIMER PARCIAL DE ÁLGEBRA LINEAL 10 de noviembre de 2020

Apellidos y Nombre:...
.... **DNI:**......................................

1) [3 puntos] Halla todas las soluciones del sistema (con $i = \sqrt{-1}$)

$$\begin{cases} x - iy + z & = & 3 + i, \\ x + iy + (1-i)z & = & 2 + i. \end{cases}$$

Tras la transformación elemental $f_2 \mapsto f_2 - f_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 1 & 3+i \\ 0 & 2i & -i & -1 \end{array} \right) \underset{f_2 \mapsto \frac{f_2}{2i}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 1 & 3+i \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{array} \right) \underset{f_1 \mapsto f_1 + i f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-\frac{i}{2} & \frac{5}{2}+i \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{array} \right).$$

Tomando $z = \lambda$ (la tercera es la columna que no es pivote), se tiene

$$x = \frac{5}{2} + i + \big(\frac{i}{2} - 1\big)\lambda, \qquad y = \frac{i}{2} + \frac{\lambda}{2}, \qquad z = \lambda.$$

(sigue por detrás)

2) [4 puntos] Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Un acierto cuenta 1 y un fallo descuenta 1/3. No contestar no penaliza.

- V. $\square$ F. $\boxed{\text{X}}$ Para todo par de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con $\det(A) = \det(B) = 0$ se cumple $\det(A+B) = 0$. Por ejemplo $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con $a_{11} = a_{12} = 1$, $a_{21} = a_{22} = 0$ y $B = A^t$.

- V. $\square$ F. $\boxed{\text{X}}$ Un sistema lineal con 2020 ecuaciones y 2021 incógnitas siempre tiene infinitas soluciones. Podría contener $x_1 + \cdots + x_{2021} = 1$ y $x_1 + \cdots + x_{2021} = 0$.

- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\square$ Si $T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es cierta matriz constante, las matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que verifican $MT = M^t$ forman un espacio vectorial. La relación se preserva por combinaciones lineales ya que $(\lambda M_1 + \mu M_2)T = \lambda M_1 T + \mu M_2 T$ y $(\lambda M_1 + \mu M_2)^t = \lambda M_1^t + \mu M_2^t$.

- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\square$ La desigualdad $\text{rg}(AB) \le \text{rg}(A)$ se verifica para cualquier $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Las columnas de AB son combinación lineal de las de A.

3) [3 puntos] Calcula la dimensión del núcleo y de la imagen de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabemos por la teoría $\dim \mathsf{Im}(f) = \mathsf{rg}(A)$ y $\dim \mathsf{Ker}(f) = \dim V - \mathsf{rg}(A)$ por tanto basta hallar $\mathsf{rg}(A)$. Con las transformaciones elementales $f_3 \mapsto f_3 - f_1$ y $f_3 \mapsto f_3 - f_2$ (o de un golpe $f_3 \mapsto f_3 - f_1 - f_2$) la última fila se anula. Entonces

$$\mathsf{rg}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

porque las dos primeras columnas (o filas) son linealmente independientes ya que no son proporcionales. Por tanto $\dim \mathsf{Im}(f) = 2$ y $\dim \mathsf{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \mathsf{rg}(A) = 4 - 2 = 2$.

Modelo 4 PRIMER PARCIAL DE ÁLGEBRA LINEAL 10 de noviembre de 2020

Apellidos y Nombre: ....

.... **DNI:**......................................

1) [4 puntos] Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Un acierto cuenta 1 y un fallo descuenta 1/3. No contestar no penaliza.

- V. ☐ F. ☒ Un sistema lineal con 2020 ecuaciones y 2021 incógnitas siempre tiene infinitas soluciones. Podría contener $x_1 + \cdots + x_{2021} = 1$ y $x_1 + \cdots + x_{2021} = 0$.
- V. ☒ F. ☐ Si $T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es cierta matriz constante, las matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que verifican $MT = M^t$ forman un espacio vectorial. La relación se preserva por combinaciones lineales ya que $(\lambda M_1 + \mu M_2)T = \lambda M_1 T + \mu M_2 T$ y $(\lambda M_1 + \mu M_2)^t = \lambda M_1^t + \mu M_2^t$.
- V. ☒ F. ☐ La desigualdad $\text{rg}(AB) \le \text{rg}(A)$ se verifica para cualquier $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Las columnas de AB son combinación lineal de las de A.
- V. ☐ F. ☒ Para todo par de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con $\det(A) = \det(B) = 0$ se cumple $\det(A+B) = 0$. Por ejemplo $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con $a_{11} = a_{12} = 1$, $a_{21} = a_{22} = 0$ y $B = A^t$.

2) [3 puntos] Calcula la dimensión del núcleo y de la imagen de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabemos por la teoría $\dim \mathsf{Im}(f) = \mathsf{rg}(A)$ y $\dim \mathsf{Ker}(f) = \dim V - \mathsf{rg}(A)$ por tanto basta hallar $\mathsf{rg}(A)$. Con las transformaciones elementales $f_3 \mapsto f_3 - f_1$ y $f_3 \mapsto f_3 - f_2$ (o de un golpe $f_3 \mapsto f_3 - f_1 - f_2$) la última fila se anula. Entonces

$$\mathsf{rg}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

porque las dos primeras columnas (o filas) son linealmente independientes ya que no son proporcionales. Por tanto $\dim \mathsf{Im}(f) = 2$ y $\dim \mathsf{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \mathsf{rg}(A) = 4 - 2 = 2$.

(sigue por detrás)

3) [3 puntos] Halla todas las soluciones del sistema (con $i = \sqrt{-1}$)

$$\begin{cases} x + y - iz & = & 3 + i, \\ x + (1-i)y + iz & = & 2 + i. \end{cases}$$

Tras la transformación elemental $f_2 \mapsto f_2 - f_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -i & 3+i \\ 0 & -i & 2i & -1 \end{array}\right) \underset{f_2 \mapsto i f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -i & 3+i \\ 0 & 1 & -2 & -i \end{array}\right) \underset{f_1 \mapsto f_1 - f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-i & 3+2i \\ 0 & 1 & -2 & -i \end{array}\right).$$

Tomando $z = \lambda$ (la tercera es la columna que no es pivote), se tiene

$$x = 3 + 2i + (i-2)\lambda, \qquad y = -i + 2\lambda, \qquad z = \lambda.$$

Modelo 5 Primer parcial de álgebra lineal 10 de noviembre de 2020

Apellidos y Nombre:...

.... **DNI:**......................................

1) [3 puntos] Calcula la dimensión del núcleo y de la imagen de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabemos por la teoría $\dim \mathsf{Im}(f) = \mathsf{rg}(A)$ y $\dim \mathsf{Ker}(f) = \dim V - \mathsf{rg}(A)$ por tanto basta hallar $\mathsf{rg}(A)$. Con las transformaciones elementales $f_3 \mapsto f_3 - f_1$ y $f_3 \mapsto f_3 - f_2$ (o de un golpe $f_3 \mapsto f_3 - f_1 - f_2$) la última fila se anula. Entonces

$$\mathsf{rg}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

porque las dos primeras columnas (o filas) son linealmente independientes ya que no son proporcionales. Por tanto $\dim \mathsf{Im}(f) = 2$ y $\dim \mathsf{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \mathsf{rg}(A) = 4 - 2 = 2$.

(sigue por detrás)

2) [3 puntos] Halla todas las soluciones del sistema (con $i = \sqrt{-1}$)

$$\begin{cases} x + y - iz & = & 3 + i, \\ x + (1-i)y + iz & = & 2 + i. \end{cases}$$

Tras la transformación elemental $f_2 \mapsto f_2 - f_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -i & 3+i \\ 0 & -i & 2i & -1 \end{array}\right) \underset{f_2 \mapsto i f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -i & 3+i \\ 0 & 1 & -2 & -i \end{array}\right) \underset{f_1 \mapsto f_1 - f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-i & 3+2i \\ 0 & 1 & -2 & -i \end{array}\right).$$

Tomando $z = \lambda$ (la tercera es la columna que no es pivote), se tiene

$$x = 3 + 2i + (i-2)\lambda, \qquad y = -i + 2\lambda, \qquad z = \lambda.$$

3) [4 puntos] Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Un acierto cuenta 1 y un fallo descuenta 1/3. No contestar no penaliza.

- V. $\square$ F. $\boxed{\text{X}}$ Un sistema lineal con 2020 ecuaciones y 2021 incógnitas siempre tiene infinitas soluciones. Podría contener $x_1 + \cdots + x_{2021} = 1$ y $x_1 + \cdots + x_{2021} = 0$.

- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\square$ Si $T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es cierta matriz constante, las matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que verifican $MT = M^t$ forman un espacio vectorial. La relación se preserva por combinaciones lineales ya que $(\lambda M_1 + \mu M_2)T = \lambda M_1 T + \mu M_2 T$ y $(\lambda M_1 + \mu M_2)^t = \lambda M_1^t + \mu M_2^t$.

- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\square$ La desigualdad $\operatorname{rg}(AB) \le \operatorname{rg}(A)$ se verifica para cualquier $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Las columnas de AB son combinación lineal de las de A.

- V. $\square$ F. $\boxed{\text{X}}$ Para todo par de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con $\det(A) = \det(B) = 0$ se cumple $\det(A+B) = 0$. Por ejemplo $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con $a_{11} = a_{12} = 1$, $a_{21} = a_{22} = 0$ y $B = A^t$.

Modelo 6 PRIMER PARCIAL DE ÁLGEBRA LINEAL 10 de noviembre de 2020

Apellidos y Nombre:..

.... **DNI:**......................................

1) [3 puntos] Halla todas las soluciones del sistema (con $i = \sqrt{-1}$)

$$\left\{\begin{array}{lcl} x + y - iz & = & 3 + i, \\ x + (1-i)y + iz & = & 2 + i. \end{array}\right.$$

Tras la transformación elemental $f_2 \mapsto f_2 - f_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -i & 3+i \\ 0 & -i & 2i & -1 \end{array}\right) \underset{f_2 \mapsto i f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -i & 3+i \\ 0 & 1 & -2 & -i \end{array}\right) \underset{f_1 \mapsto f_1 - f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-i & 3+2i \\ 0 & 1 & -2 & -i \end{array}\right).$$

Tomando $z = \lambda$ (la tercera es la columna que no es pivote), se tiene

$$x = 3 + 2i + (i-2)\lambda, \qquad y = -i + 2\lambda, \qquad z = \lambda.$$

(sigue por detrás)

2) [4 puntos] Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Un acierto cuenta 1 y un fallo descuenta 1/3. No contestar no penaliza.

- V. $\square$ F. $\boxed{\text{X}}$ Un sistema lineal con 2020 ecuaciones y 2021 incógnitas siempre tiene infinitas soluciones. Podría contener $x_1 + \cdots + x_{2021} = 1$ y $x_1 + \cdots + x_{2021} = 0$.
- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\square$ Si $T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es cierta matriz constante, las matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que verifican $MT = M^t$ forman un espacio vectorial. La relación se preserva por combinaciones lineales ya que $(\lambda M_1 + \mu M_2)T = \lambda M_1 T + \mu M_2 T$ y $(\lambda M_1 + \mu M_2)^t = \lambda M_1^t + \mu M_2^t$.
- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\square$ La desigualdad $\text{rg}(AB) \le \text{rg}(A)$ se verifica para cualquier $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Las columnas de AB son combinación lineal de las de A.
- V. $\square$ F. $\boxed{\text{X}}$ Para todo par de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con $\det(A) = \det(B) = 0$ se cumple $\det(A+B) = 0$. Por ejemplo $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con $a_{11} = a_{12} = 1$, $a_{21} = a_{22} = 0$ y $B = A^t$.

3) [3 puntos] Calcula la dimensión del núcleo y de la imagen de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabemos por la teoría $\dim \text{Im}(f) = \text{rg}(A)$ y $\dim \text{Ker}(f) = \dim V - \text{rg}(A)$ por tanto basta hallar $\text{rg}(A)$. Con las transformaciones elementales $f_3 \mapsto f_3 - f_1$ y $f_3 \mapsto f_3 - f_2$ (o de un golpe $f_3 \mapsto f_3 - f_1 - f_2$) la última fila se anula. Entonces

$$\text{rg}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

porque las dos primeras columnas (o filas) son linealmente independientes ya que no son proporcionales. Por tanto $\dim \text{Im}(f) = 2$ y $\dim \text{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \text{rg}(A) = 4 - 2 = 2$.