Modelo 1 EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA LINEAL 29 de enero de 2021

Apellidos y Nombre: ....

.... **DNI:**......................................

1) [2 puntos] Resuelve el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ix + 2y = 5, \\ x + (1-i)y = 2 - 3i. \end{cases}$

Multiplicando la primera ecuación por i y sumándosela a la segunda, se tiene

$$\left.\begin{aligned} ix + 2y &= 5 \\ (1+i)y &= 2+2i \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2+2i}{1+i} = 2, \quad x = \frac{5 - 2\cdot 2}{i} = \frac{1}{i} = -i.$$

---

2) [2 puntos] Halla una base en la que la matriz $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ se diagonalice.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5^2 - (-4)6 = \lambda^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \text{autovalores: } \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1.$$

Los autovectores respectivos $\vec{v}_i$ son soluciones de $(A - \lambda_i I)\vec{v}_i = \vec{0}$:

$$\lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{por ejemplo} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{por ejemplo} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Una base es $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

(sigue por detrás)

3) [2 puntos] Halla la proyección ortogonal de $(16, 25, -3)^t \in \mathbb{R}^3$ sobre el plano $x - y + z = 0$.

$V =$ subespacio de $\mathbb{R}^3$ correspondiente al plano $\Rightarrow V^\perp$ está generado por $\vec{n} = (1, -1, 1)^t$.
Si $\vec{v} = (16, 35, -3)^t$, el vector del enunciado,

$$P_{V^\perp}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{16 - 25 - 3}{3}\vec{n} = -4\vec{n}.$$

Entonces $P_V(\vec{v}) = \vec{v} - P_{V^\perp}(\vec{v}) = \vec{v} + 4\vec{n} = (20, 21, 1)^t$.

---

4) [2 puntos] Halla una base del núcleo y una base de la imagen para la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{dada por} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 10x + 20y + 30z \end{pmatrix}.$$

La matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix}$ que tiene una fila múltiplo de la otra $\Rightarrow$ rg$(A) = 1 \Rightarrow$ $\dim \mathsf{Im}(f) = 1$, $\dim \mathsf{Ker}(f) = 3 - 1 = 2$.

La imagen está generada por las columnas, así que una base es por ejemplo $\{(1, 10)^t\}$. El núcleo está formado por las soluciones de $x + 2y + 3z = 0$. Como $\dim \mathsf{Ker}(f) = 2$, basta escoger dos linealmente independientes, por ejemplo $\{(3, 0, -1)^t, (2, -1, 0)^t\}$.

---

5) [2 puntos] ¿Es cierto siempre que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son matrices con determinante nulo su suma también lo es? Razona tu respuesta.

No. Por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ pero $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Modelo 2 EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA LINEAL 29 de enero de 2021

Apellidos y Nombre:...

.... **DNI:**......................................

1) [2 puntos] Halla una base del núcleo y una base de la imagen para la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{dada por} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 10x + 20y + 30z \end{pmatrix}.$$

La matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix}$ que tiene una fila múltiplo de la otra $\Rightarrow$ $\mathsf{rg}(A) = 1 \Rightarrow$ $\dim \mathsf{Im}(f) = 1$, $\dim \mathsf{Ker}(f) = 3 - 1 = 2$.

La imagen está generada por las columnas, así que una base es por ejemplo $\{(1, 10)^t\}$. El núcleo está formado por las soluciones de $x + 2y + 3z = 0$. Como $\dim \mathsf{Ker}(f) = 2$, basta escoger dos linealmente independientes, por ejemplo $\{(3, 0, -1)^t, (2, -1, 0)^t\}$.

---

2) [2 puntos] Halla la proyección ortogonal de $(16, 25, -3)^t \in \mathbb{R}^3$ sobre el plano $x - y + z = 0$.

$V =$ subespacio de $\mathbb{R}^3$ correspondiente al plano $\Rightarrow$ $V^\perp$ está generado por $\vec{n} = (1, -1, 1)^t$.
Si $\vec{v} = (16, 35, -3)^t$, el vector del enunciado,

$$P_{V^\perp}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{16 - 25 - 3}{3}\vec{n} = -4\vec{n}.$$

Entonces $P_V(\vec{v}) = \vec{v} - P_{V^\perp}(\vec{v}) = \vec{v} + 4\vec{n} = (20, 21, 1)^t$.

(sigue por detrás)

3) [2 puntos] Halla una base en la que la matriz $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ se diagonalice.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5^2 - (-4)6 = \lambda^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \text{autovalores: } \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1.$$

Los autovectores respectivos $\vec{v}_i$ son soluciones de $(A - \lambda_i I)\vec{v}_i = \vec{0}$:

$$\lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{por ejemplo} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{por ejemplo} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Una base es $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

---

4) [2 puntos] Resuelve el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ix + 2y = 5, \\ x + (1-i)y = 2 - 3i. \end{cases}$

Multiplicando la primera ecuación por i y sumándosela a la segunda, se tiene

$$\left.\begin{aligned} ix + 2y &= 5 \\ (1+i)y &= 2 + 2i \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2+2i}{1+i} = 2, \quad x = \frac{5 - 2\cdot 2}{i} = \frac{1}{i} = -i.$$

---

5) [2 puntos] ¿Es cierto siempre que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son matrices con determinante nulo su suma también lo es? Razona tu respuesta.

No. Por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ pero $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Modelo 3 Examen final de álgebra lineal 29 de enero de 2021

Apellidos y Nombre:...

.... **DNI:**.....................................

1) [2 puntos] Halla una base en la que la matriz $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ se diagonalice.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5^2 - (-4)6 = \lambda^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \text{autovalores: } \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1.$$

Los autovectores respectivos $\vec{v}_i$ son soluciones de $(A - \lambda_i I)\vec{v}_i = \vec{0}$:

$$\lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{por ejemplo} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{por ejemplo} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Una base es $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

---

2) [2 puntos] Halla una base del núcleo y una base de la imagen para la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{dada por} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 10x + 20y + 30z \end{pmatrix}.$$

La matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix}$ que tiene una fila múltiplo de la otra $\Rightarrow$ $\mathrm{rg}(A) = 1 \Rightarrow$ $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$, $\dim \mathrm{Ker}(f) = 3 - 1 = 2$.

La imagen está generada por las columnas, así que una base es por ejemplo $\{(1, 10)^t\}$. El núcleo está formado por las soluciones de $x + 2y + 3z = 0$. Como $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$, basta escoger dos linealmente independientes, por ejemplo $\{(3, 0, -1)^t, (2, -1, 0)^t\}$.

(sigue por detrás)

3) [2 puntos] Halla la proyección ortogonal de $(16, 25, -3)^t \in \mathbb{R}^3$ sobre el plano $x - y + z = 0$.

$V =$ subespacio de $\mathbb{R}^3$ correspondiente al plano $\Rightarrow V^\perp$ está generado por $\vec{n} = (1, -1, 1)^t$.
Si $\vec{v} = (16, 35, -3)^t$, el vector del enunciado,

$$P_{V^\perp}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{16 - 25 - 3}{3}\vec{n} = -4\vec{n}.$$

Entonces $P_V(\vec{v}) = \vec{v} - P_{V^\perp}(\vec{v}) = \vec{v} + 4\vec{n} = (20, 21, 1)^t$.

---

4) [2 puntos] Resuelve el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ix + 2y = 5, \\ x + (1 - i)y = 2 - 3i. \end{cases}$

Multiplicando la primera ecuación por i y sumándosela a la segunda, se tiene

$$\left.\begin{aligned} ix + 2y &= 5 \\ (1 + i)y &= 2 + 2i \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2 + 2i}{1 + i} = 2, \quad x = \frac{5 - 2 \cdot 2}{i} = \frac{1}{i} = -i.$$

---

5) [2 puntos] ¿Es cierto siempre que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son matrices con determinante nulo su suma también lo es? Razona tu respuesta.

No. Por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ pero $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Modelo 4 EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA LINEAL 29 de enero de 2021

Apellidos y Nombre:..

.... **DNI:**.....................................

1) [2 puntos] Halla la proyección ortogonal de $(16, 25, -3)^t \in \mathbb{R}^3$ sobre el plano $x-y+z=0$.

$V =$ subespacio de $\mathbb{R}^3$ correspondiente al plano $\Rightarrow V^\perp$ está generado por $\vec{n} = (1, -1, 1)^t$.
Si $\vec{v} = (16, 35, -3)^t$, el vector del enunciado,

$$P_{V^\perp}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{16-25-3}{3}\vec{n} = -4\vec{n}.$$

Entonces $P_V(\vec{v}) = \vec{v} - P_{V^\perp}(\vec{v}) = \vec{v} + 4\vec{n} = (20, 21, 1)^t$.

---

2) [2 puntos] Resuelve el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ix + 2y = 5, \\ x + (1-i)y = 2-3i. \end{cases}$

Multiplicando la primera ecuación por i y sumándosela a la segunda, se tiene

$$\left.\begin{aligned} ix + 2y &= 5 \\ (1+i)y &= 2+2i \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2+2i}{1+i} = 2, \quad x = \frac{5-2\cdot 2}{i} = \frac{1}{i} = -i.$$

(sigue por detrás)

3) [2 puntos] Halla una base del núcleo y una base de la imagen para la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{dada por} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 10x + 20y + 30z \end{pmatrix}.$$

La matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix}$ que tiene una fila múltiplo de la otra $\Rightarrow$ $\text{rg}(A) = 1 \Rightarrow$ $\dim \text{Im}(f) = 1$, $\dim \text{Ker}(f) = 3 - 1 = 2$.

La imagen está generada por las columnas, así que una base es por ejemplo $\{(1, 10)^t\}$. El núcleo está formado por las soluciones de $x + 2y + 3z = 0$. Como $\dim \text{Ker}(f) = 2$, basta escoger dos linealmente independientes, por ejemplo $\{(3, 0, -1)^t, (2, -1, 0)^t\}$.

---

4) [2 puntos] Halla una base en la que la matriz $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ se diagonalice.

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -4 \\ 6 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5^2 - (-4)6 = \lambda^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \text{autovalores: } \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1.$$

Los autovectores respectivos $\vec{v}_i$ son soluciones de $(A - \lambda_i I)\vec{v}_i = \vec{0}$:

$$\lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{por ejemplo} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{por ejemplo} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Una base es $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

---

5) [2 puntos] ¿Es cierto siempre que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son matrices con determinante nulo su suma también lo es? Razona tu respuesta.

No. Por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ pero $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Modelo 5 EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA LINEAL 29 de enero de 2021

Apellidos y Nombre:..

.... **DNI:**......................................

1) [2 puntos] Halla una base en la que la matriz $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ se diagonalice.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5^2 - (-4)6 = \lambda^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \text{autovalores: } \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1.$$

Los autovectores respectivos $\vec{v}_i$ son soluciones de $(A - \lambda_i I)\vec{v}_i = \vec{0}$:

$$\lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{por ejemplo} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{por ejemplo} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Una base es $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

---

2) [2 puntos] Halla la proyección ortogonal de $(16, 25, -3)^t \in \mathbb{R}^3$ sobre el plano $x-y+z=0$.

$V =$ subespacio de $\mathbb{R}^3$ correspondiente al plano $\Rightarrow V^\perp$ está generado por $\vec{n} = (1, -1, 1)^t$.
Si $\vec{v} = (16, 35, -3)^t$, el vector del enunciado,

$$P_{V^\perp}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{16 - 25 - 3}{3}\vec{n} = -4\vec{n}.$$

Entonces $P_V(\vec{v}) = \vec{v} - P_{V^\perp}(\vec{v}) = \vec{v} + 4\vec{n} = (20, 21, 1)^t$.

(sigue por detrás)

3) [2 puntos] Halla una base del núcleo y una base de la imagen para la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{dada por} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 10x+20y+30z \end{pmatrix}.$$

La matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix}$ que tiene una fila múltiplo de la otra $\Rightarrow$ $\mathrm{rg}(A) = 1 \Rightarrow$ $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$, $\dim \mathrm{Ker}(f) = 3 - 1 = 2$.

La imagen está generada por las columnas, así que una base es por ejemplo $\{(1,10)^t\}$. El núcleo está formado por las soluciones de $x + 2y + 3z = 0$. Como $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$, basta escoger dos linealmente independientes, por ejemplo $\{(3,0,-1)^t, (2,-1,0)^t\}$.

---

4) [2 puntos] Resuelve el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ix + 2y = 5, \\ x + (1-i)y = 2 - 3i. \end{cases}$

Multiplicando la primera ecuación por i y sumándosela a la segunda, se tiene

$$\left.\begin{aligned} ix + 2y &= 5 \\ (1+i)y &= 2+2i \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2+2i}{1+i} = 2, \quad x = \frac{5 - 2\cdot 2}{i} = \frac{1}{i} = -i.$$

---

5) [2 puntos] ¿Es cierto siempre que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son matrices con determinante nulo su suma también lo es? Razona tu respuesta.

No. Por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ pero $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Modelo 6 EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA LINEAL 29 de enero de 2021

Apellidos y Nombre: ....
.... **DNI:**......................................

1) [2 puntos] Resuelve el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ix + 2y = 5, \\ x + (1-i)y = 2 - 3i. \end{cases}$

Multiplicando la primera ecuación por i y sumándosela a la segunda, se tiene

$$\left.\begin{array}{ll} ix + 2y & = 5 \\ (1+i)y & = 2+2i \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2+2i}{1+i} = 2, \quad x = \frac{5 - 2\cdot 2}{i} = \frac{1}{i} = -i.$$

---

2) [2 puntos] Halla una base del núcleo y una base de la imagen para la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{dada por} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 10x + 20y + 30z \end{pmatrix}.$$

La matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix}$ que tiene una fila múltiplo de la otra $\Rightarrow$ $\mathrm{rg}(A) = 1 \Rightarrow$ $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$, $\dim \mathrm{Ker}(f) = 3 - 1 = 2$.

La imagen está generada por las columnas, así que una base es por ejemplo $\{(1,10)^t\}$. El núcleo está formado por las soluciones de $x + 2y + 3z = 0$. Como $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$, basta escoger dos linealmente independientes, por ejemplo $\{(3,0,-1)^t, (2,-1,0)^t\}$.

(sigue por detrás)

3) [2 puntos] Halla la proyección ortogonal de $(16, 25, -3)^t \in \mathbb{R}^3$ sobre el plano $x-y+z=0$.

$V =$ subespacio de $\mathbb{R}^3$ correspondiente al plano $\Rightarrow V^\perp$ está generado por $\vec{n} = (1, -1, 1)^t$.
Si $\vec{v} = (16, 35, -3)^t$, el vector del enunciado,

$$P_{V^\perp}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{16-25-3}{3}\vec{n} = -4\vec{n}.$$

Entonces $P_V(\vec{v}) = \vec{v} - P_{V^\perp}(\vec{v}) = \vec{v} + 4\vec{n} = (20, 21, 1)^t$.

---

4) [2 puntos] Halla una base en la que la matriz $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ se diagonalice.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5^2 - (-4)6 = \lambda^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \text{autovalores: } \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1.$$

Los autovectores respectivos $\vec{v}_i$ son soluciones de $(A - \lambda_i I)\vec{v}_i = \vec{0}$:

$$\lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{por ejemplo} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{por ejemplo} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Una base es $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

---

5) [2 puntos] ¿Es cierto siempre que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son matrices con determinante nulo su suma también lo es? Razona tu respuesta.

No. Por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ pero $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$
