Teoremas de factorización

Fernando Chamizo

3 de mayo de 2019

Nota: Este documento es un resumen muy abreviado de algunos puntos principales de una parte del capítulo 7 de [3] y un resultado del capítulo 8.

1. Un argumento poco riguroso de Euler

Un polinomio P con $P(0)\neq 0$ y raíces $\pm r_1$, $\pm r_2,\dots,\ \pm r_n$, es de la forma

$$(1)\quad p_{2n}(x-r_1)(x+r_1)\cdots(x-r_n)(x+r_n) = p_{2n}(x^2-r_1^2)\cdots(x^2-r_n^2) = p_{2n}x^{2n}+\cdots+p_2x^2+p_0.$$

Comparando coeficientes se cumple

$$(2)\qquad p_2 = (-1)^{n-1}p_{2n}\sum_{k_1<k_2<\cdots<k_{n-1}} r_{k_1}^2 r_{k_2}^2\cdots r_{k_{n-1}}^2 \qquad \text{y} \qquad p_0 = (-1)^n p_{2n}\prod_{k=1}^n r_k^2.$$

Entonces se tiene la siguiente fórmula sencilla:

$$(3)\qquad -\frac{p_2}{p_0} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k^2}.$$

Euler empleó el desarrollo de Taylor del seno para escribir

$$(4)\qquad S(x) = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\dots \qquad \text{con}\quad S(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Lo que se dijo es que S tiene "raíces" $\pm k\pi$ donde $k\in\mathbb{Z}^+$ y si se aplica (3) con $p_0=1$ y $p_2=-1/3!$ se deduce

$$(5)\qquad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}.$$

Este resultado es ¡correcto! como demostraría después el propio Euler pero el argumento carece de rigor matemático porque se está aplicando una identidad sobre polinomios a una función trascendente.

Lo que veremos en este capítulo es que las funciones enteras admiten una factorización en términos de sus ceros y en lo mejores casos, como en el ejemplo de Euler, se comportan como una especie de polinomios de grado infinito. Además hay una relación estrecha entre el crecimiento de una función entera y lo que difiere de factorizarse como un polinomio.

Antes de comenzar vamos a ver dos obstáculos principales que hay que tener en cuenta en este proyecto.

En primer lugar, hay funciones enteras que no tienen ceros. Para ellas no hay factorización posible, el argumento de Euler daría un absurdo por ejemplo aplicado a la serie de Taylor de e^{z^2}. Todas las funciones enteras sin ceros son de la forma e^g con g entera por tanto las factorizaciones serán salvo multiplicación por e^g. El otro obstáculo tiene que ver con la convergencia. Si una función entera no idénticamente nula tiene infinitos ceros $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, necesariamente $a_n \to \infty$ porque los ceros no tienen puntos de acumulación. En particular, el producto $\prod_{n=1}^\infty (z - a_n)$ análogo al habitual de la factorización de polinomios no tiene sentido, da infinito. Una solución parcial es sacar un "factor infinito" $(-1)^n \prod a_n$ considerando en su lugar $\prod_{n=1}^\infty (1 - z/a_n)$. Lo malo es que hay algo más sutil: si los a_n no crecen rápido, el producto se puede anular aunque ninguno de sus factores lo haga. Por ejemplo para $a_n = n + 1$ y $z = 1$, se tiene

$$(6) \qquad \prod_{n=1}^{N} \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{N}{N+1} = \frac{1}{N+1} \to 0.$$

De esta forma $z = 1$ es un cero indeseado que no estaba es la colección de los a_n seleccionados.

2. Productos infinitos

Con lo visto anteriormente, está claro que algo debemos estudiar sobre la convergencia de productos infinitos. Escribiremos los factores de estos productos como $1 + z_n$ porque estamos interesados en que a la larga tengamos un producto de números que son prácticamente unos.

Un convenio un poco chocante que se toma en variable compleja es definir

$$(7) \qquad \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z_n) \ \textit{converge} \text{ si } \lim_{N\to\infty} \prod_{\substack{n=1 \\ z_n \neq -1}}^{N} (1 + z_n) \text{ existe y no es cero.}$$

Eliminar el valor cero está relacionado con los problemas antes descritos (en [3, §7.1] hay más comentarios). Cuando el límite anterior se anula, se dice que el producto *diverge a cero*. Con esta definición un producto infinito converge a cero, en el sentido de que converge y el límite de los productos parciales es cero, si y solo si alguno de sus factores es nulo.

También se define un concepto de *convergencia absoluta*:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n) \text{ converge absolutamente si } \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}(1+|z_n|) \text{ existe.} \tag{8}$$

Todo lo que necesitamos saber sobre convergencia de productos infinitos está recogido en los dos resultados siguientes:

Proposición 2.1. *El producto* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ *converge absolutamente si y solo si* $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ *converge.*

Proposición 2.2. *Si un producto converge absolutamente entonces converge. En particular es cero solo cuando se anula alguno de sus factores.*

En resumen, si solo estamos interesados en la convergencia absoluta, como será nuestro caso, los productos infinitos se comportan como los finitos y la convergencia es tan fácil o difícil como la de una serie.

Demostración de la Proposición 2.1. Está claro que

$$1+\sum_{n=1}^{N}|z_n| \le \prod_{n=1}^{N}(1+|z_n|), \tag{9}$$

entonces si el producto converge absolutamente la serie también converge. Por otro lado, la desigualdad $1+x\le e^x$, que se sigue fácilmente de que e^x-x-1 es creciente en $\mathbb{R}^+$, implica

$$\prod_{n=1}^{N}(1+|z_n|) \le e^{\sum_{n=1}^{N}|z_n|}. \tag{10}$$

De aquí, los productos parciales están acotados superiormente y como forman una sucesión no decreciente, convergen. □

Para referencia posterior, separemos la siguiente desigualdad finita:

Lema 2.3. *Para* z_n *números complejos cualesquiera y* $M>N$ *enteros positivos, se cumple*

$$\Big|\prod_{n=1}^{M}(1+z_n)-\prod_{n=1}^{N}(1+z_n)\Big| \le e^{\sum_{n=1}^{N}|z_n|}\Big(e^{\sum_{n=N+1}^{M}|z_n|}-1\Big). \tag{11}$$

Demostración. El primer miembro es

$$\Big|\prod_{n=1}^{N}(1+z_n)\Big|\Big|\prod_{n=N+1}^{M}(1+z_n)-1\Big| \le \prod_{n=1}^{N}(1+|z_n|)\Big(\prod_{n=N+1}^{M}(1+|z_n|)-1\Big) \tag{12}$$

donde la desigualdad se sigue pensando en el desarrollo de los productos y tomando el módulo de cada sumando. En esta situación, basta aplicar la desigualdad $1+x \le e^x - 1$ antes mencionada. $\square$

Demostración de la Proposición 2.2. Por la Proposición 2.1, la serie $\sum |z_n|$ converge y en particular solo pueden existir un número finito de términos con $z_n = -1$, digamos $z_n \neq -1$ para $n \ge N_0$. Si descontamos los factores con $n < N_0$, por la definición (7) el producto no se anula, así que la parte final del enunciado es consecuencia de lo anterior.

La convergencia absoluta y la Proposición 2.1 aseguran que las sumas parciales de $|z_n|$ están acotadas, entonces se tiene para $M > N \ge N_0$ por el Lema 2.3 con $z_n = 0$ para $n < N_0$

$$\Big|\prod_{n=N_0}^{M}(1+z_n) - \prod_{n=N_0}^{N}(1+z_n)\Big| \le C\Big(e^{\sum_{n=N+1}^{M}|z_n|} - 1\Big). \tag{13}$$

La sucesión de sumas parciales es de Cauchy, pues $\sum |z_n|$ converge por tanto cuando $M, N \to \infty$ el lado derecho tiende a cero y se deduce que los productos parciales comenzando en N_0 son una sucesión de Cauchy y por tanto su límite existe. Además, si en el Lema 2.3 tomamos $M \to \infty$ y $z_n = 0$ para $n \le N$ con N grande, se sigue que el límite no es cero. $\square$

Nuestro interés son más los productos que den funciones holomorfas que los productos numéricos. Por ello es relevante enunciar con lo aprendido la siguiente variante del Criterio M de Weierstrass. Aquí y en lo sucesivo diremos que un producto infinito de funciones $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *converge uniformemente* si converge y los productos parciales convergen uniformemente.

Teorema 2.4. *Dada una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones holomorfas en Ω, si para cada compacto $K \subset \Omega$ existen constantes $M_n(K)$ tales que $|1-f_n(z)| \le M_n(K)$ para $z \in K$ y $\sum_{n=1}^{\infty} M_n(K)$ converge, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente sobre compactos y define una función holomorfa F en Ω. Además $F'(z)/F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)/f_n(z)$ también con convergencia uniforme sobre los compactos que no contienen ceros de F.*

Demostración. Fijado un compacto $K \subset \Omega$, por la Proposición 2.1 y la Proposición 2.2 acotando $|z_n|$ por $M_n(K)$, el producto converge para cada $z \in K$ y así define una función F. Si $F_N(z) = \prod_{n=1}^{N} f_n(z)$, tomando $M \to \infty$ en el Lema 2.3 se deduce $|F(z) - F_N(z)| \le C\big(\exp\big(\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n(K)\big) - 1\big)$. Esta cota tiende a cero cuando $N \to \infty$ y no depende de z, por consiguiente $F_N \rightrightarrows F$ sobre cada compacto $K \subset \Omega$. La teoría asegura entonces que F es holomorfa y $F_N' \rightrightarrows F'$. El conjunto de ceros $\mathcal{Z}$ de F es unión de los conjuntos de ceros de F_N y por tanto $1/F_N \rightrightarrows 1/F$ en cada compacto $K \subset \Omega - \mathcal{Z}$ de donde $F_N'/F_N \rightrightarrows F'/F$. Para terminar basta notar que F_N'/F_N es igual a $\sum_{n=1}^N f_n'(z)/f_n(z)$. $\square$

Por ejemplo, al estudiar funciones elípticas apareció $\prod_{n=1}^\infty \left(1 + q^{2n-1}e^{2\pi iz}\right)$ con $|q| < 1$ y otros productos infinitos que eran sencillas variantes de este. Aplicando el Teorema 2.4 con $M_n(K) = Cq^{2n-1}$ donde C es una cota superior para la exponencial en el compacto seleccionado se tiene que la convergencia uniforme a una función holomorfa se deduce de la convergencia de la serie geométrica.

3. Factorización de funciones enteras

En primer lugar, definimos unos factores artificiales para evitar problemas con la divergencia a cero.

Para $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ se llama k-ésimo *factor primario* o *factor elemental* a la función entera

$$E_k(z) = (1 - z)e^{z+z^2/2+z^3/3+\cdots+z^k/k} \tag{14}$$

donde se sobreentiende $E_0(z) = 1 - z$.

Una forma muy general de la factorización de funciones enteras es la siguiente [1, VII.5]:

Teorema 3.1. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión dando todos los ceros en $\mathbb{C} - \{0\}$ de una función entera f repetidos con su multiplicidad y sea $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de enteros de modo que*

$$\sum_{n=1}^\infty \Big(\frac{r}{|a_n|}\Big)^{1+k_n} \quad \text{converge para todo } r > 0. \tag{15}$$

Entonces existe una función entera g tal que

$$f(z) = z^k e^{g(z)} \prod_{n=1}^\infty E_{k_n}(z/a_n) \tag{16}$$

donde k es el orden del posible cero de f en el origen. Además el producto converge absolutamente y uniformemente sobre compactos.

El resultado se extiende al caso de un número finito de ceros y $k_n = 0$ pero este caso se reduce a observar que como $f(z)z^{-k}\prod_{n=1}^N(1 - z/a_n)^{-1}$ no tiene ceros, admite un logaritmo en $\mathbb{C}$.

Fuera de ese caso sencillo, ya hemos señalado que $|a_n| \to \infty$ porque los ceros no son aislados. Esto implica que tomando $k_n = n$ es seguro que (15) se cumple. Con eso tenemos un enunciado más limpio pero menos económico, que es consecuencia de lo anterior:

Teorema 3.2 (Teorema de factorización de Weierstrass)**.** *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que da todos los ceros en $\mathbb{C}-\{0\}$ de una función entera f repetidos con su multiplicidad. Entonces existe una función entera g tal que*

$$f(z) = z^k e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_n(z/a_n) \tag{17}$$

donde k es el orden del posible cero de f en el origen.

Veamos si así conseguimos factorizar $f(z) = \operatorname{sen} z$ para fundamentar el argumento de Euler. Los ceros son $\pm\pi n$ y la condición (15) se cumple para $k_n = 1$ ya que fijado $r \in \mathbb{R}^+$ se tiene $r^2 \sum n^{-2} < \infty$. Como en $z = 0$ hay un cero de orden 1, el Teorema 3.1 asegura, agrupando $\pm n$,

$$\operatorname{sen} z = ze^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_1\big(\frac{z}{\pi n}\big) E_1\big(-\frac{z}{\pi n}\big). \tag{18}$$

Recordando la definición (14), cada factor se simplifica a $1 - z^2/(\pi n)^2$. En definitiva, hemos probado

$$\operatorname{sen} z = ze^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\Big). \tag{19}$$

si hubiéramos usado el Teorema 3.2 no se habría producido tal simplificación. Esto está relacionado con que no hay unicidad en (16), podemos poner k_n más grande de lo que necesitamos si nos apetece pero eso complicaría el aspecto final.

En estos resultados de factorización resulta llamativo que escribamos los factores primarios en lugar de $1 - z/a_n$ que sería lo natural pensando en polinomios. El único propósito de este artificio es que los factores $E_{k_n}(z/a_n)$ estén tan cerca de 1 para a_n grande que el producto necesariamente converja. El siguiente resultado muestra cómo esta cercanía a 1 aumenta con k_n y será el mayor ingrediente en la prueba del Teorema 3.1.

Lema 3.3. *Dado $k \ge 0$, se verifica*

$$|E_k(z) - 1| \le |z|^{k+1} \qquad \textit{para todo} \quad |z| \le 1. \tag{20}$$

Demostración. Un cálculo prueba que $E_k'(z) = -z^k \exp(z + z/2 + \cdots + z/k)$. Está claro con ello que $E_k^{(n)}(0) = 0$ para $1 \le n \le k$ porque E_k' tiene un cero de orden k en $z = 0$ y pensando en la serie de Taylor de la exponencial, $E_k^{(n)}(0) \le 0$ para $n > k$. Esto implica que la serie de Taylor de E_k es de la forma

$$E_k(z) = 1 + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{con} \quad a_n \le 0. \tag{21}$$

Entonces para $|z| \le 1$

$$|E_k(z) - 1| = \Big| \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n z^n \Big| \le - \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n |z|^{k+1} = |z|^{k+1}\big(1 - E_k(1)\big) \tag{22}$$

y como $E_k(1) = 0$ se deduce el resultado. □

Demostración del Teorema 3.1. Veamos primero que el producto converge absolutamente para cada z. Sea $r = |z|$ y escribamos

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{k_n}(z/a_n) = \prod_{|a_n|<r} E_{k_n}(z/a_n) \prod_{|a_n|\ge r} \Big(1 + \big(E_{k_n}(z/a_n) - 1\big)\Big). \tag{23}$$

En el segundo miembro el primer producto es finito. Por el Lema 3.3

$$\big|E_{k_n}(z/a_n) - 1\big| \le b_n \qquad \text{con} \quad b_n = \Big(\frac{r}{|a_n|}\Big)^{1+k_n} \tag{24}$$

y la Proposición 2.1 y la Proposición 2.2 aseguran que el segundo producto converge y lo hace absolutamente, porque $\sum |b_n|$ converge. Además el Teorema 2.4 implica la convergencia uniforme sobre compactos. En particular (23) define una función holomorfa que se anula exactamente en la sucesión a_n. De esta forma, f dividida entre este producto y z^k es entera y sin ceros por lo cual es de la forma e^g, ya que $\mathbb{C}$ es simplemente conexo. □

4. La teoría de Hadamard

El Teorema 3.1 es un poco defectuoso en el sentido de que la función g queda indeterminada. Esto parece una defecto necesario porque por ejemplo $e^{\cos z} \operatorname{sen} z$ y $\operatorname{sen} z$ tienen los mismos ceros y darían lugar a funciones g bien distintas. Sin embargo nos gustaría en ejemplos concretos como (19) poder completar la factorización con alguna información extra. Una teoría desarrollada por Hadamard permite limitar a polinomios las posibles g a polinomios de grado acotado siempre que tengamos algún control sobre el crecimiento. Con ello, en principio dando unos cuantos valores especiales se puede determinar totalmente g.

La definición relevante aquí es que se dice que una función entera f es de *orden finito* si existe algún ρ tal que

$$\lim_{z\to\infty} |f(z)| e^{-|z|^{\rho}} = 0. \tag{25}$$

Al ínfimo de los ρ que tienen esta propiedad se llama *orden* de f y se indica con $\rho(f)$.

Por ejemplo, $\operatorname{sen} z = \big(e^{iz} - e^{-iz}\big)/2i$ por tanto $|\operatorname{sen} z| \le e^{|z|}$ lo que implica que (25) se cumple para todo $\rho > 1$. Aunque no se cumple para $\rho = 1$, al tomar el ínfimo se tiene que el orden de $\operatorname{sen} z$ es 1. Es fácil ver que e^{2019z} o $(\cos z)^{2019}$ también tienen orden 1. Un ejemplo de función con $\rho(f) = 2$ es $f(z) = \operatorname{sen}(z^2)$. El orden puede no ser entero. Por ejemplo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n/(2n+1)!$ es una función entera que coincide con $(\operatorname{sen}\sqrt{z})/\sqrt{z}$ cuando en el numerador y en el denominador se escoge la misma determinación de la raíz y tiene orden $1/2$. Hay funciones enteras como e^{e^z} que crecen tan rápido en ciertas direcciones que no son de orden finito.

La teoría de Hadamard solo se aplica a funciones enteras de orden finito y en ese sentido es menos general que el Teorema 3.1 que se aplica a cualquier función entera. A cambio da una información más precisa. El resultado básico es el siguiente:

Teorema 4.1 (Teorema de factorización de Hadamard)**.** *Si f es una función entera de orden finito $\rho(f)$ y d es la parte entera de $\rho(f)$ entonces* (16) *se verifica con $k_n = d$ y g un polinomio de grado menor o igual que d.*

Como cabe esperar, si f tiene solo un número finito de ceros, el resultado es todavía válido con la misma prueba, simplemente el producto en (16) será finito. A diferencia de lo que ocurría con los resultados anteriores, ahora este caso finito no es inmediato.

Aplicando el Teorema 4.1, deducimos de nuevo que $k_n = 1$ es una elección válida para $\operatorname{sen} z$ pero afinamos más (19) asegurando que existen constantes $A, B \in \mathbb{C}$ tales que

$$\operatorname{sen} z = z e^{Az+B} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\Big). \tag{26}$$

La función S en (4) es entera completando su definición en la singularidad evitable del origen con $S(0) = \lim_{z\to 0} S(z) = 1$. En la fórmula anterior, $S(0) = 1$ implica $B = 0$ y $S(z) = S(-z)$ implica $A = 0$. Por tanto hemos probado la fórmula de factorización del seno que convenientemente empleada justifica el argumento de Euler:

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\Big). \tag{27}$$

Dicho sea de paso, Euler llegó a probar esta fórmula sin la variable compleja del siglo XIX con un bello argumento basado en que los polinomios $(1 + iz/n)^n$ tienden a e^{iz}. El original se puede encontrar en [2] y es totalmente legible, aunque a un lector moderno las lagunas en el rigor probablemente le inquietarán un poco [5].

Otro ejemplo destacado es la función Γ. No es homolomorfa pero $1/\Gamma$ sí lo es: los polos de Γ dan lugar a singularidades evitables que son ceros y no aparecen nuevos polos porque Γ no se anula. Se puede probar, aunque no lo haremos aquí, que

$$\lim_{|s|\to\infty} |\Gamma(s)| e^{|s|^\rho} = \infty \qquad \text{para todo } \rho > 1. \tag{28}$$

Entonces $1/\Gamma$ es de orden 1. Sabemos que tiene ceros simples en $\mathbb{Z}_{\le 0}$, por tanto el Teorema 4.1 implica

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{As+B}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{s}{n}\Big)e^{-s/n}. \tag{29}$$

La relación $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ lleva a que $\big(s\Gamma(s)\big)^{-1} \to 1$ cuando $s \to 0$, por tanto $B = 0$. La constante A es la llamada *constante de Euler-Mascheroni*. Escogiendo $s = 1$ y tomando logaritmos, con algunas manipulaciones sencillas [3, §7.4] se tiene

$$A = \gamma = \lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \log(N+1)\Big) = 0.5772\ldots \tag{30}$$

La fórmula resultante para Γ es

$$\Gamma(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{s}{n}\Big)^{-1}e^{s/n} \tag{31}$$

y permite probar algunos resultados interesantes. Por ejemplo, calculando $-s\Gamma(s)\Gamma(-s)$ con ella y recordando $\Gamma(1-s) = -s\Gamma(-s)$, se tiene al comparar con (27)

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi s)} \tag{32}$$

que es la *fórmula de reflexión de Euler*. Por otro lado, escribiendo (31) como el límite de los productos parciales y recordando (30) se puede deducir (véase [3, §7.4.1] para los detalles) la fórmula debida a Gauss

$$\Gamma(s) = \lim_{N\to\infty}\frac{N^s N!}{s(s+1)\cdots(s+N)}. \tag{33}$$

La función ζ de Riemann no es entera pero $(s-1)\zeta(s)$ sí lo es y también se sabe que es de orden 1 (esto se puede deducir con algún esfuerzo a partir de que $1/\Gamma$ tiene esta propiedad). El Teorema 4.1 aplicado a la función entera $(s-1)\zeta(s)$ implica

$$\zeta(s) = \frac{e^{As+B}}{s-1}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{s}{a_n}\Big)e^{s/a_n}. \tag{34}$$

Se conoce $A = \log(2\pi) - 1$ y $B = -\log 2$. En la teoría de la distribución de los primos la función relevante es $-\zeta'/\zeta$ que según el Teorema 2.4 cumple

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} - A + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{a_n - s} - \frac{1}{a_n}\Big). \tag{35}$$

Al ser la convergencia uniforme, constituye un paso importante de cara a justificar los argumentos de la famosa memoria de Riemann.

5. La prueba de la factorización de Hadamard

En comparación con el Teorema 3.1, el Teorema 4.1 es bastante más complicado de probar. La idea clave es que las funciones enteras que no crecen mucho no pueden tener ceros que tiendan a infinito muy despacio. Hay varios resultados de este tipo que inicialmente se desarrollaron para entender los misteriosos ceros de la función ζ de Riemann. El que emplearemos aquí es:

Proposición 5.1. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que da todos los ceros en $\mathbb{C}-\{0\}$ de una función entera f repetidos con su multiplicidad. Si f cumple* (25) *entonces $\sum |a_n|^{-\rho-\epsilon}$ converge para cualquier $\epsilon > 0$.*

Demostración. Supongamos $f(0) = 1$, lo cual se puede conseguir siempre reemplazando f por $z^{-k}f$ y dividiendo por una constante. Esto no modifica los a_n ni un valor admisible de ρ. Si llamamos $N(r)$ a la función que cuenta con multiplicidades el número de ceros de f en $|z| \le r$, la *fórmula de Jensen* afirma que

$$\int_0^r \frac{N(t)}{t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right|\,d\theta. \tag{36}$$

Este resultado es bien conocido y asequible. Esencialmente lo que se hace para obtenerlo es que si f no tiene ceros con $|z| \le r$, y consecuentemente el primer miembro es nulo, se tiene $f = e^g$ en esta región con $g(0) = 0$ y el segundo miembro es también nulo debido a la fórmula integral de Cauchy en la siguiente forma:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right|\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re g(re^{i\theta})\,d\theta = \Re\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{g(z)}{z}\,dz = \Re g(0) = 0. \tag{37}$$

Se puede forzar que una función entera no se anule en un disco a base de dividir por factores lineales y para cada uno de ellos (36) no es difícil. De esta forma se puede completar una demostración. Véanse los detalles en [4].

Por (36) se tiene que los n tales que $2^{m-1} < |a_n| \le 2^m$ son a lo más

$$N(2^m) \le \frac{1}{\log 2}\int_{2^m}^{2^{m+1}} \frac{N(t)}{t}\,dt \le \frac{1}{2\pi\log 2}\int_0^{2\pi} (2^{m+1})^\rho\,d\theta = \frac{2^{(m+1)\rho}}{\log 2}, \tag{38}$$

donde para la segunda igualdad se ha usado (25) suponiendo m mayor que cierta constante $m_0 \in \mathbb{Z}^+$. Entonces

$$\sum_{|a_n|>2^{m_0}} \frac{1}{|a_n|^{\rho+\epsilon}} \le \sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{2^{m-1}<|a_n|\le 2^m} \frac{1}{|a_n|^{\rho+\epsilon}} \le \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{2^{(m+1)\rho}}{2^{(m-1)(\rho+\epsilon)}\log 2} \tag{39}$$

que converge por ser una serie geométrica de razón $2^{-\epsilon} < 1$. □

Un resultado auxiliar sencillo es una consecuencia del Lema de Schwarz:

Lema 5.2 (Lema de Borel-Carathéodory)**.** *Si* $f : \mathbb{D} \longrightarrow \{z \ : \ \Re z < M\}$ *es una función holomorfa con* $f(0) = 0$*, entonces se cumple*

$$|f(z)| \le \frac{2M|z|}{1-|z|} \qquad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}. \tag{40}$$

Demostración. La transformación de Möbius $T(z) = z/(z-2M)$ aplica el semiplano $\Re z < M$ en $\mathbb{D}$ y se cumple $T(0) = 0$ por tanto $T \circ f$ está bajo las hipótesis del Lema de Schwarz que implica $|T(f(z))| \le |z|$. Empleando la desigualdad triangular y despejando $|f(z)|$ se sigue el resultado. $\square$

Demostración del Teorema 4.1. Como $d + 1 > \rho(f)$, el criterio de comparación y la Proposición 5.1 aseguran que (15) se verifica con $k_n = d$.

Lo que resta probar es que g en (16) es un polinomio de grado menor o igual que d. Por simplicidad supondremos $k = 0$ y $f(0) = 1$, lo cual no restringe generalidad pues, como antes, siempre se puede reemplazar f por $z^{-k} f$ y dividir por una constante sin modificar d. Escribamos (16) como

$$e^{g(z)} = f_R(z) \prod_{|a_n|>R} \frac{1}{E_d(z/a_n)} \qquad \text{con} \quad f_R(z) = \frac{f(z)}{\prod_{|a_n|\le R} E_d(z/a_n)}. \tag{41}$$

El producto en la primera igualdad es holomorfo en $|z| < R$ y f_R es entera y no se anula en $|z| < R$. El Teorema 2.4 derivando d veces nos da

$$g^{(d+1)}(z) = \Big(\frac{f_R'(z)}{f_R(z)}\Big)^{(d)} + d! \sum_{|a_n|>R} \frac{1}{(a_n - z)^{d+1}}. \tag{42}$$

Aquí se ha usado $E_d'(z)/E_d(z) = z^d/(z-1) = z^{d-1} + z^{d-2} + \cdots + 1 - (z-1)^{-1}$. Véanse los detalles sobre la convergencia en [3, T.1.17].

Vamos a probar que si $|z| < R/4$ entonces los dos sumandos de la derecha de (42) tienden a cero cuando $R \to \infty$, de ahí se deduce que $g^{(d+1)} = 0$ y por tanto que g es un polinomio de grado a lo más d. Para el segundo sumando basta emplear comparación

$$\sum_{|a_n|>R} \frac{1}{|a_n - z|^{d+1}} \le \Big(\frac{4}{3}\Big)^{d+1} \sum_{|a_n|>R} \frac{1}{|a_n|^{d+1}} \tag{43}$$

que tiende a cero cuando $R \to \infty$ por la Proposición 5.1, ya que $d + 1 > \rho$.

El primer sumando de (42) es más complicado. Sabemos que f_R no se anula en $|z| < R$ por tanto existe F_R holomorfa con $f_R = e^{F_R}$ y $F_R(0) = 0$ y consecuentemente el primer sumando es $F_R^{(d+1)}$. Si D es el disco centrado de radio $R/2$, por la fórmula integral de Cauchy se tiene para $|z| < R/4$

$$(44)\quad \big|F_R^{(d+1)}(z)\big| = \Big|\frac{(d+1)!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{F_R(w)}{(w-z)^{d+2}}\,dw\Big| \le \frac{(d+1)!}{2\pi}\cdot 2\pi\frac{R}{2}\cdot\big(\frac{R}{4}\big)^{-d-2}\sup_{|w|=R/2}|F_R(w)|.$$

Recordando la definición de f_R en (41), está claro que si $|z| = 2R$ se cumple $|f_R(z)| \le |f(z)|$ y la condición (25) implica que para R grande $|f_R(z)| \le e^{R^\rho}$. El principio del módulo máximo asegura que esta desigualdad es también cierta para $|z| < R$, donde la función F_R está definida y verifica $e^{\Re F_R} = |f_R|$. Con ello $\Re F_R(z) < R^\rho$ si $|z| < R$. La función $F_R(Rz)$ está bajo las hipótesis del Lema 5.2 con $M = R^\rho$. Aplicándolo con $z = w/R$ y $|w| = R/2$ se deduce $|F_R(w)| \le 2R^\rho$ que sustituido en (44) implica que $F_R^{(d+1)}$, que es el primer sumando de (42), también tiende a cero cuando $R \to \infty$. $\square$

Referencias

[1] J. B. Conway. *Functions of one complex variable*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, second edition, 1978.

[2] L. Euler. *Introducción al análisis de los infinitos*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”, Seville; Real Sociedad Matemática Española, Madrid, 2000. Translated from the Latin by J. L. Arantegui Tamayo, Annotated by A. J. Durán Guardeño, With introductory material by J. Ordóñez, M. Martínez Pérez and Durán Guardeño, Edited by Durán Guardeño and F. J. Pérez Fernández.

[3] J. L. Fernández Pérez. *Variable Compleja IIϵ*. 2018. La versión preliminar de algunos capítulos se pueden descargar de `www.uam.es/fernando.chamizo`.

[4] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[5] W. Walter. Old and new approaches to Euler’s trigonometric expansions. *Amer. Math. Monthly*, 89(4):225–230, 1982.