Funciones elípticas

Fernando Chamizo

19 de febrero de 2019

1. Origen histórico y definición moderna

Con las técnicas aprendidas en Cálculo I sabíamos resolver integrales del tipo

$$I = \int R\big(t, \sqrt{P(t)}\big)\, dt \tag{1}$$

con R una función racional y P un polinomio de grado 1. Esto era fácil, si $P(t) = at + b$ bastaba el cambio $u^2 = at + b$ para llevar I a una integral racional, que siempre podemos calcular si sabemos factorizar polinomios. Si $\deg(P) = 2$, donde deg indica el grado, las cosas se complicaban bastante más pero conceptualmente todo lo que hay que tener en cuenta para reducir I a una integral racional es que

$$\operatorname{arc\,sen} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{arc\,senh} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}. \tag{2}$$

Aquí $\operatorname{arc\,sen} x$ para $-1 < x < 1$ es la función inversa del seno, periódico de periodo 2π, y $\operatorname{arc\,senh} x = \log\big(x + \sqrt{x^2+1}\big)$ es la función inversa del seno hiperbólico, periódico de periodo $2\pi i$. Por ser un poco más concretos, completando cuadrados y escalando, cambios del tipo $x = \operatorname{arc\,sen} t$ y $x = \operatorname{arc\,senh} t$ permiten quitar la raíz cuadrada en I y llegar a una integral trigonométrica o exponencial que se convierte en una racional por métodos conocidos. La idea es la misma, las integrales racionales en $e^{\alpha t}$ se reducen a integrales racionales en t con un cambio logarítmico y con ojos imaginarios las funciones trigonométricas son exponenciales.

Con esto se acaban los cálculos explícitos. El caso $\deg(P) = 3$ se puede transformar con un cambio ingenioso en el caso bicuadrático $P(t) = Q(t^2)$ con $\deg(Q) = 2$ y también todos los casos $\deg(P) = 4$ se reducen a este (como ya sabía Euler [9]) pero se conoce que I no es expresable en general en términos de funciones elementales (la idea se explica en [4, V]). Por otro lado, el caso cúbico o bicuadrático aparece en diferentes problemas básicos, por ejemplo el cálculo de la longitud de un arco de elipse, la evolución del ángulo de un péndulo o la distancia al Sol de un planeta en función del tiempo. Debido al primero de estos problemas, se llamaron *integrales elípticas* a este tipo de integrales.

En la primera mitad del siglo XIX, tras el trabajo pionero de Euler, las investigaciones de Gauss, Abel, Jacobi y Eisenstein, por guardar aproximadamente el orden cronológico, probaron una serie de sorprendentes resultados acerca de las integrales elípticas, especialmente cuando el integrando en (1) es

$$R\big(t, \sqrt{P(t)}\big) = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{3}$$

donde k es un parámetro al que se llamó *módulo*. Por alguna razón misteriosa, estas integrales adquieren una estructura más rica que los análogos cuadráticos de (2). Entre los resultados más notables están que las funciones inversas correspondientes a estas integrales, llamadas *funciones elípticas*, se extienden de manera natural (hoy diríamos analíticamente o de manera meromorfa) a funciones que tienen dos periodos, uno real y otro complejo[1], y cumplen unas fórmulas de adición que recuerdan a las de las funciones trigonométricas. Dicho sea de paso, centrarse en (3) no es algo tan específico como podría parecer. La integral (1) siempre se puede reducir a (3) y a otros dos tipos más [2].

Una vez pasado el siglo XIX, con la variable compleja ya construida y conocida, es más natural introducir las funciones elípticas dentro de un problema de clasificación.

Las funciones trigonométricas como $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ tienen periodo 2π, lo cual se deriva de que e^z tiene periodo $2\pi i$. En general, si queremos construir una función f meromorfa en $\mathbb{C}$ tal que $f(z) = f(z + z_0)$ con $z_0 \in \mathbb{C}$, basta considerar $f(z) = g\big(e^{2\pi i z/z_0}\big)$ donde g es meromorfa en $\mathbb{C} - \{0\}$. De hecho, con algún esfuerzo se prueba que estas son todas las posibilidades.

¿Existen funciones con más periodos? Evitamos tonterías imponiendo que los periodos apunten en direcciones diferentes. Definimos consecuentemente una *función elíptica* como una función meromorfa en $\mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2) \tag{4}$$

con ω_1 y ω_2 linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Como $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, dos periodos es el límite.

Haremos unos convenios con respecto a la notación. Para f no constante, supondremos que los periodos ω_1 y ω_2 son "mínimos", en el sentido de que el siguiente retículo es el conjunto formado por todos los posibles periodos

$$\Lambda = \{m\omega_1 + n\omega_2 \,:\, m, n \in \mathbb{Z}\}. \tag{5}$$

[1] Hay una prueba física de ello utilizando que las oscilaciones de un péndulo vienen dadas por una función elíptica [2, §1.8]. En breve es que todos sabemos que un péndulo oscila de forma periódica y cambiar $t \to it$ en $F = ma$ es lo mismo que cambiar la fuerza de signo. Ahora bien, un péndulo con la gravedad invertida también oscila periódicamente porque es lo mismo que un péndulo dado la vuelta.

Escribiremos $\Lambda^* = \Lambda - \{0\}$. Llamaremos *paralelogramo fundamental* al paralelogramo cerrado de vértices 0, ω_1, $\omega_1 + \omega_2$ y ω_2 o a cualquiera de sus trasladados. Está claro que el comportamiento de f en $\mathcal{P}$ condiciona f en todo $\mathbb{C}$.

Nuestro objetivo es caracterizar todas las funciones elípticas que tienen unos periodos dados. También entraremos en el problema de la inversión de integrales elípticas y en la construcción de ejemplos particulares.

2. Algunas propiedades y el ejemplo básico

Los siguientes resultados están enunciados como proposiciones para resaltar su importancia pero son más bien propiedades que se reducen a ejercicios si uno tiene suficientemente clara la Variable Compleja I. Con ellas se limitan las posibilidades para construir funciones elípticas.

Proposición 2.1. *Una función elíptica sin polos es constante.*

Demostración. Se deduce del teorema de Liouville. □

Una curiosidad histórica es que este fue el teorema que originalmente estableció Liouville y no el que lleva su nombre en los textos actuales [6].

Proposición 2.2. *No existen funciones elípticas que tengan un solo polo simple (de orden 1) en el paralelogramo fundamental.*

Demostración. Si existiera tal función f con un polo simple en z_0, trasladando levemente el paralelogramo fundamental $\mathcal{P}$, podemos suponer que $z_0 \in \operatorname{Int}(\mathcal{P})$. Por el teorema de los residuos $\int_{\partial\mathcal{P}} f = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) \neq 0$. Esto contradice $\int_{\partial\mathcal{P}} f = 0$ que se sigue porque las integrales sobre los lados se cancelan dos a dos debido a la periodicidad. □

Proposición 2.3. *Sea f una función elíptica, $z_0 \in \mathbb{C}$ fijado y $\mathcal{P}$ un paralelogramo fundamental tal que $f(z) \neq z_0, \infty$ para $z \in \partial\mathcal{P}$. El número de soluciones de $f(z) = z_0$ en $\mathcal{P}$ contando multiplicidades es igual a la suma de los órdenes de los polos de f en $\mathcal{P}$.*

Demostración. La función $g(z) = f(z) - z_0$ es elíptica y por tanto g' y g'/g también lo son. Por una generalización del principio del argumento, $\int_{\partial\mathcal{P}} g'/g = 2\pi i(Z - P)$ con Z y P la cantidad de ceros y polos en $\mathcal{P}$ contando multiplicidades. Como en la demostración anterior, la integral es nula por la simetría, así pues $Z = P$. □

Ahora que tenemos alguna idea acerca de qué debemos buscar, intentemos construir una función elíptica. Tomemos por ejemplo z^{-2019} que tiene un polo de orden mayor que 1 en el origen. Para convertir esta función en doblemente periódica, trasladamos por todos los periodos y sumamos los resultados. De esta forma construimos nuestra primera función elíptica:

$$F(z) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} (z + m\omega_1 + n\omega_2)^{-2019} = \sum_{\omega\in\Lambda} (z+\omega)^{-2019}. \tag{6}$$

La convergencia absoluta está asegurada (fuera de los polos en $m\omega_1 + n\omega_2$) aunque no entraremos en ello. La Proposición 2.2 sugiere que la función elíptica "más sencilla" debiera tener polos de orden 2 en lugar de 2019, sin embargo cambiar 2019 por 2 en (6) no es posible porque la serie no converge, da "infinito". Siguiendo la estela de los físicos que *renormalizan* con éxito cancelando infinitos[2], lo arreglamos restando la "cantidad infinita" $\sum_{m,n}(m\omega_1 + n\omega_2)^{-2}$, definiendo así la *función $\wp$ de Weierstrass* como

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda^*} \Big(\frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\Big). \tag{7}$$

Se puede probar que la nueva suma vuelve a converger absolutamente fuera de los polos en $m\omega_1 + n\omega_2$. Claramente $\wp$ es par, por tanto las soluciones de las que nos habla la Proposición 2.3 son siempre z y $-z$.

Eisenstein dio significado a cambiar 2019 por 1 en (6). En ese caso no hay renormalización posible que dé lugar a una función elíptica porque contradiría la Proposición 2.2, sin embargo supo construir las funciones elípticas a partir de ella con la ventaja de seguir una generalización más o menos natural de las funciones trigonométricas [8].

Geométricamente, identificando por la periodicidad lados opuestos de $\mathcal{P}$, este se convierte en un toro y $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, el plano completado, es una esfera (la *esfera de Riemann*) por tanto $\wp$ es, en este sentido, una aplicación 2 a 1 del toro a la esfera. Riemann introdujo una visión topológica y geométrica de las funciones de variable compleja y de las integrales (1) con $\deg(P)$ arbitrario [9] por la que las características de Euler del toro y la esfera se relacionan con que la aplicación sea 2 a 1. Con la terminología actual, es un caso sencillo de la llamada *fórmula de Riemann-Hurwitz*.

3. Todas las funciones elípticas

Derivando (7), se sigue que $\wp'$ viene dada por una serie como (6) cambiando 2019 por 3 y multiplicando el resultado por -2. Como $\wp$ es par y $\wp'$ es impar, no podemos escribir $\wp'$

[2]El fenómeno ya aparece en Física básica. El potencial eléctrico a distancia a de un conductor infinito rectilíneo es $V(a) = \int_0^\infty (t^2 + a^2)^{-1/2}\,dt = \infty$. Sin embargo si lo calculamos con $\int \frac{d}{da}V(a)\,da$, introduciendo la derivada bajo $\int_0^\infty$ sale un resultado finito correcto. Los físicos explican que esto se debe a que hay cargas en el infinito y el segundo método introduce una constante de integración infinita que las compensa. El potencial se define salvo constantes, por tanto V y $V + \text{cte}$ llevan a la misma Física.

en función de $\wp$. Lo que vamos a probar es que con solo añadir esta función tenemos todas las funciones elípticas. Con ello se resuelve el problema de clasificación que habíamos tomado como motivación.

Teorema 3.1. *Cualquier función elíptica f puede escribirse de forma única como*

$$f(z) = G\big(\wp(z)\big) + \wp'(z)H\big(\wp(z)\big) \tag{8}$$

donde G y H son funciones racionales (cocientes de polinomios).

Demostración. La unicidad se sigue porque si no la hubiera, o bien $\wp'$ sería un función racional de $\wp$, contradiciendo la simetría, o bien $\wp$ satisfaría una ecuación polinómica, lo que también es imposible considerando el orden del polo en el origen.

Por la identidad

$$f(z) = \frac{f(z)+f(-z)}{2} + \wp'(z)\frac{f(z)-f(-z)}{2\wp'(z)} \tag{9}$$

basta probar que toda función elíptica par g es una función racional de $\wp$.

Si g tiene un polo en el origen, debe ser de orden par y cambiando g por $g(z) - P\big(\wp(z)\big)$ para algún polinomio P, lo podemos cancelar y conseguir que no se anule allí. Por otro lado, si hubiera un cero de orden $2k$ en el origen, cambiando g por $g\wp^k$ conseguiremos eliminarlo. En consecuencia, basta estudiar el caso en que g no tiene ni ceros ni polos en Λ. Elijamos un paralelogramo fundamental $\mathcal{P}$ de modo que g no tenga tampoco ceros o polos en $\partial\mathcal{P}$. Por la Proposición 2.3 con $z_0 = 0$ se sigue que en $\mathcal{P}$ podemos agrupar ceros y polos en pares (c,p). Para cada uno de ellos la función $g(z)\big(\wp(z)-\wp(p)\big)/\big(\wp(z)-\wp(c)\big)$ tiene menos ceros y menos polos que g en $\mathcal{P}$, porque hemos cancelado los de c, $-c$, p y $-p$, y no hemos añadido ninguno nuevo ya que $\wp(z) - z_0$ con $z_0 = \wp(c), \wp(p)$ tiene exactamente un polo de orden 2 en $\mathcal{P}$ y por tanto sólo dos ceros, gracias a la Proposición 2.3. Repitiendo el proceso se llega a una función elíptica entera

$$G(z) = g(z)\prod_j \frac{\wp(z)-\wp(p_j)}{\wp(z)-\wp(c_j)} \tag{10}$$

que debe ser constante por la Proposición 2.1. $\square$

Con esto no resulta extraño que la teoría de funciones elípticas esté plagada de identidades sorprendentes ya que cualquier función elíptica que nos inventemos por cualquier método, debe coincidir con una de las indicadas en el teorema, exactamente con aquella que cancele los polos. Una de las identidades más básicas permite conectar con las integrales elípticas. Para probarla conviene tener en mente el desarrollo de Laurent de $\wp$.

Lema 3.2. *Para $z \neq 0$ en un entorno del origen se tiene*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} z^{2k} \qquad \textit{con} \qquad a_{2k} = (2k+1) \sum_{\omega \in \Lambda^*} \omega^{-2k-2}. \tag{11}$$

Los coeficientes a_{2k} son funciones homogéneas en Λ, en el sentido de que cambiar Λ por $\mu\Lambda$ equivale a multiplicar por una potencia de μ. Las funciones con esa propiedad son lo que se llaman *formas modulares* (véase [5] para la definición habitual) y tienen una importancia capital en las Matemáticas contemporáneas.

Demostración. Por Taylor, $(1+x)^{-2} + (1-x)^{-2} = 2\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)x^{2k}$ y basta aplicar este resultado a (7) después de escribir en la suma $(z+\omega)^{-2} = \omega^{-2}(1+z/\omega)^{-2}$ y agrupar las contribuciones de ω y $-\omega$. □

Proposición 3.3. *La función $\wp$ verifica*

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \tag{12}$$

con $g_2 = 60\sum_{\omega\in\Lambda^*}\omega^{-4}$ *y* $g_3 = 140\sum_{\omega\in\Lambda^*}\omega^{-6}$.

Demostración. Por el Lema 3.2, $\wp(z) = z^{-2} + h_1(z)$ con h_1 holomorfa en un entorno del origen y $h_1(0) = h_1'(0) = 0$. Con un poco de esfuerzo de cálculo, del mismo resultado se deduce la existencia de h_2 y h_3 con idénticas propiedades tales que

$$(\wp'(z))^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{8a_2}{z^2} - 16a_4 + h_2(z) \qquad \text{y} \qquad (\wp(z))^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{3a_2}{z^2} + 3a_4 + h_3(z). \tag{13}$$

Esto implica $(\wp')^2 = 4\wp^3 - 20a_2\wp - 28a_4$ por la Proposición 2.1, ya que la diferencia de ambos miembros se extiende a una función elíptica sin polos que se anula en el origen. □

La función $y = y(z)$ que formalmente resuelve $(y')^2 = 4y^3 - g_2y - g_3$ con $y(0) = y_0$ viene definida implícitamente por

$$z = \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}. \tag{14}$$

Ahora bien, $\wp(z+z_0)$ con $\wp(z_0) = y_0$ es solución de la ecuación por la Proposición 3.3. En este sentido, $\wp$ da la inversa de la integral elíptica (14). Un comentario notacional histórico es que al pasar el integrando de (14) a la forma (3) mediante cambios de variable, el módulo k queda expresado en términos de g_2 y g_3 que son funciones homogéneas en Λ. Es de ahí de donde deriva el nombre forma modular para funciones con esta propiedad.

Si uno se pone muy riguroso, al igual que en (2), no se puede decir que una función periódica sea la inversa de nada (por la falta de inyectividad) y hay que restringir (14) a ciertos entornos o especificar cómo rodea el camino de integración a las singularidades del integrando, así como determinar la rama de la raíz cuadrada (cf. [2, §2.1]). Desde el punto de vista actual, el enfoque clásico original de introducir las funciones elípticas a través de las integrales elípticas es menos claro que el moderno pues fuerza antes o después a enfrentarse a funciones multivaluadas.

La aplicación $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$ transforma cada elemento de $\mathbb{C}$ en un punto de la curva proyectiva $E: \ y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$. Se puede probar que es una biyección si uno se restringe a $\mathcal{P}$ identificando los lados opuestos. En este sentido, E es un toro. Este tipo de curvas se llaman *curvas elípticas* y la suma de números complejos en $\mathbb{C}$ induce a través de esta aplicación una ley de grupo en E que admite una representación geométrica sencilla [5, p.11]. Las curvas elípticas y una relación con las formas modulares muy diferente de la vista aquí, han tenido un papel fundamental en la prueba del Último Teorema de Fermat.

En relación con esta ley de grupo, la función $\wp$ verifica la siguiente *fórmula de adición*:

Proposición 3.4. *Para $z, w, z+w \notin \Lambda$*

$$\wp(z+w) = \frac{1}{4}\Big(\frac{\wp'(z)-\wp'(w)}{\wp(z)-\wp(w)}\Big)^2 - \wp(z) - \wp(w). \tag{15}$$

La prueba, no incluida aquí, puede llevarse a cabo como en la Proposición 3.3 mostrando que la diferencia de ambos miembros define una función entera que se anula en un punto [2].

4. Funciones elípticas con funciones theta

Una vez que tenemos el Teorema 3.1 parece que no hay nada más que decir acerca de las funciones elípticas, todas están recogidas allí. Por otro lado, la introducción de la función $\wp$ es históricamente tardía. Parte de los desarrollos iniciales estuvieron ligados a las llamadas funciones θ, sobre todo tras la contribución de Jacobi[3]. La notación clásica es un poco engorrosa y como aquí solo vamos a tratar con una de ellas, simplificaremos la terminología habitual definiendo para un τ fijado con $\Im\tau > 0$

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2\pi i n z} \quad \text{donde} \quad q = e^{\pi i \tau}. \tag{16}$$

La convergencia está asegurada por el rápido decaimiento de q^{n^2} y por tanto θ es una función entera. Abreviaremos también $(1+\tau)/2$ por τ^*.

En cierto modo, esta función es elíptica con periodos $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \tau$ salvo un factor. El siguiente resultado es un simple ejercicio.

[3] En el prefacio de [2] se muestra cierto descontento con el desarrollo histórico de "poner el carro de las funciones theta antes del caballo de las funciones elípticas".

Lema 4.1. *La función definida por* (16) *satisface*

$$\theta(z+1) = \theta(z) \qquad y \qquad \theta(z+\tau) = q^{-1}e^{-2\pi i z}\theta(z). \tag{17}$$

Además se tienen las simetrías

$$\theta(z) = \theta(-z), \quad \theta(z+\frac{1}{2}) = \theta(\frac{1}{2}-z), \quad \theta(z+\tau^*) = -e^{-2\pi i z}\theta(\tau^*-z). \tag{18}$$

Muchas de las construcciones de funciones elípticas están basadas en dividir dos funciones que satisfagan relaciones como (17) para que el factor extra se cancele.

Proposición 4.2. *Sea P la función entera definida por el producto infinito*

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \big(1+q^{2n-1}e^{2\pi i z}\big)\big(1+q^{2n-1}e^{-2\pi i z}\big). \tag{19}$$

Entonces, la función $h(z) = \theta(z)/P(z)$ es elíptica y entera y por tanto constante.

Demostración. Un cálculo reorganizando un poco los factores, prueba que P satisface las relaciones $P(z+1) = P(z)$ y $P(z+\tau) = q^{-1}e^{-2\pi i z}P(z)$. Por tanto la función h es meromorfa y $h(z) = h(z+1) = h(z+\tau)$. Es decir, es elíptica.

Definamos $L = \{\tau^*+m+n\tau \,:\, m,n \in \mathbb{Z}\}$. Se puede comprobar (ejercicio) que los elementos de L anulan justamente un factor de P y de hecho son todos sus ceros, que son simples. La tercera simetría de (18) con $z=0$ implica que θ tiene un cero en τ^* y por (17), debe anularse también en L. Así pues, todos los ceros de P se cancelan con los de θ y h es entera. □

Calcular la constante (dependiente de τ, que está fijado) admite una prueba breve pero muy ingeniosa, parece que debida a Gauss [7]. Con ello se llega a una identidad famosa y sorprendente.

Teorema 4.3 (Fórmula del triple producto de Jacobi)**.** *Para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene*

$$\theta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \big(1-q^{2n}\big)\big(1+q^{2n-1}e^{2\pi i z}\big)\big(1+q^{2n-1}e^{-2\pi i z}\big).$$

Una reacción natural al ver esta fórmula es pensar que como θ viene dada por una serie fácil y el producto parece medianamente manejable, debiera existir una prueba directa sencilla y elemental (sin usar variable compleja) operando el producto. Hay varios artículos presentando pruebas "elementales" o "combinatorias" (una de las mejores es [1]) pero son a menudo indirectas o complicadas. Parece que nadie ha dado con una demostración realmente rápida asequible a estudiantes de primero de grado. En contraste, nuestra prueba breve a través de la Proposición 4.2 sirve para valorar el poder de la variable compleja.

Demostración. Por la Proposición 4.2 sabemos que $\theta(z)/P(z)$ es una constante. Llamemos K al cociente (constante) de $\theta(z)/P(z)$ entre $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$. Todo se reduce a probar $K=1$. Sustituyendo $z=1/2$ y $z=1/4$ y simplificando un poco,

$$K=\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}}{\prod_{n=1}^{\infty}\big(1-q^{2n-1}\big)^2\big(1-q^{2n}\big)}=\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{4n^2}}{\prod_{n=1}^{\infty}\big(1+q^{4n-2}\big)\big(1-q^{2n}\big)}. \tag{20}$$

Si en el denominador de la primera fracción cambiamos q por q^4 se tiene

$$\prod_{n=1}^{\infty}\big(1-q^{8n-4}\big)^2\big(1-q^{8n}\big)=\prod_{n=1}^{\infty}\big(1+q^{4n-2}\big)\prod_{n=1}^{\infty}\big(1-q^{4n-2}\big)\big(1-q^{8n-4}\big)\big(1-q^{8n}\big) \tag{21}$$

y el último producto es $\prod\big(1-q^{2n}\big)$ porque todo número par o bien es de la forma $2(2n-1)$ o bien $2(4n+2)$ o bien $2(4n)$, sin ambigüedades. Así recuperamos el denominador de la segunda fracción. Entonces la primera fracción define una función $f(q)$ holomorfa en $|q|<1$ que cumple $f(q)=f(q^4)$. Si pensamos en su desarrollo de Taylor en cero, se deduce $f(q)=f(0)=1$. □

Veamos otra relación debida a Jacobi que es muy difícil de sospechar a partir de (16).

Proposición 4.4. *Con la notación anterior, se cumple*

$$\theta^4(0)=q\theta^4(\tau/2)+\theta^4(1/2). \tag{22}$$

Por ejemplo, escribiendo $q=x$ al tomar los primeros tres términos no nulos de cada serie se sigue que en el polinomio $(1+2x+2x^4)^4-16x(1+x^2+x^6)^4-(1-2x+2x^4)^4$ hay una mágica cancelación que hace desaparecer los términos de grado bajo. De hecho el primero que sobrevive es $-16x^9$.

Demostración. Consideremos la función

$$F(z)=\frac{\theta^2(0)\theta^2(z+1/2)-\theta^2(1/2)\theta^2(z)}{e^{2\pi iz}\theta^2(z+\tau^*)}. \tag{23}$$

Es un ejercicio sencillo con (17) comprobar que las funciones $e^{-2\pi iz}\theta^2(z+1/2)/\theta^2(z+\tau^*)$ y $e^{-2\pi iz}\theta^2(z)/\theta^2(z+\tau^*)$ son elípticas (véase la siguiente demostración para más detalles) y de hecho pares usando (18). Entonces F es una función elíptica par con periodos 1 y τ. Sabemos (véase la Proposición 4.2) que el denominador tiene un cero doble en $z=0$. Es obvio por otra parte que el numerador se anula en $z=0$ y como F es par necesariamente el cero es doble. Con ello se cancela el posible polo en $z=0$ y por la doble periodicidad todos los posibles polos, que están en $\{m+n\tau\,:\,m,n\in\mathbb{Z}\}$. De la Proposición 2.1 se sigue que F es constante y tomando $z=\tau^*$ que tal constante es $-q\theta^2(\tau/2)$. eligiendo finalmente $z=1/2$ e igualando a esta constante, se sigue el resultado. □

Por ahora las únicas funciones elípticas que hemos construido con θ son muy aburridas, son constantes. Esto no hace justicia a su versatilidad pues realmente todas las funciones elípticas se pueden expresar a través de θ. Después del Teorema 3.1 basta con que lo hagamos con $\wp$.

En primer lugar consideramos una reducción de naturaleza técnica para simplificar. Si llamamos $\wp(z;\omega_1,\omega_2)$ a la función $\wp$ correspondiente a los periodos ω_1 y ω_2, está claro que

$$\wp(z;\omega_1,\omega_2) = \omega_1^{-2}\wp(\omega_1^{-1}z;1,\tau) \qquad \text{con} \quad \tau = \omega_2/\omega_1. \tag{24}$$

Además, intercambiando los nombres de ω_1 y ω_2, si es necesario, podemos asegurar $\Im\tau > 0$ ya que los signos de las partes imaginarias de ω_2/ω_1 y ω_1/ω_2 son opuestos. En definitiva, escalando, siempre podemos considerar que los periodos de $\wp$ son 1 y τ con $\Im\tau > 0$.

Proposición 4.5. *Con la notación anterior, existen A_τ, B_τ y C_τ, solo dependiendo de τ, tales que*

$$\wp(z;1,\tau) = A_\tau \frac{\theta^2(z+1/2)}{e^{2\pi i z}\theta^2(z+\tau^*)} + B_\tau \qquad y \qquad \wp(z;1,\tau) = -\Big(\frac{\theta'(z+\tau^*)}{\theta(z+\tau^*)}\Big)' + C_\tau. \tag{25}$$

Las constantes A_τ, B_τ y C_τ se pueden expresar en términos de valores especiales de θ y $\wp$ pero las fórmulas no son muy atrayentes y no las veremos aquí.

Demostración. Utilizando (17) se tiene que $\theta^2(z+1/2)$ y $\theta^2(z+\tau^*)$ son 1-periódicas y además

$$\theta^2(z+\tau+1/2) = q^{-2}e^{-4\pi i z}\theta^2(z+1/2) \qquad \text{y} \qquad \theta^2(z+\tau^*+\tau) = q^{-4}e^{-4\pi i z}\theta^2(z+\tau^*). \tag{26}$$

Esto prueba que la función h dada por la fracción en la primera fórmula de (25) es elíptica. Por otro lado, como ya habíamos mencionado, el producto del Teorema 4.3 tiene ceros simples en $\big\{\tau^*+m+n\tau \,:\, m,n\in\mathbb{Z}\big\}$ y consecuentemente h tiene polos dobles en $\Lambda = \big\{m+n\tau \,:\, m,n\in\mathbb{Z}\big\}$. Digamos que su desarrollo de Laurent en $z=0$ es de la forma $a_{-2}z^{-2}+a_{-1}z^{-1}+a_0+\dots$ entonces al comparar con el Lema 3.2 se tiene que $\wp(z;1,\tau)-h(z)/a_{-2}$ es elíptica y a lo más tiene polos simples en Λ. La Proposición 2.2 implica $a_{-1}=0$ y se sigue la primera fórmula con $A_\tau = 1/a_{-2}$ y $B_\tau = -a_0/a_{-2}$. También se podrían usar las simetrías (18) para eliminar la posibilidad de polos simples.

Sea ahora la función $f(z) = \theta'(z+\tau^*)/\theta(z+\tau^*)$. Claramente es 1-periódica y, tomando derivadas logarítmicas en la segunda fórmula de (26), satisface $f(z+\tau) = -2\pi i + f(z)$, entonces f' es elíptica. Como ya habíamos visto, $\theta(z+\tau^*)$ tiene ceros simples en Λ, entonces f' tiene allí polos dobles con un desarrollo de Laurent en el origen del tipo $-z^{-2}+a_{-1}z^{-1}+a_0+\dots$ por tanto $\wp(z;1,\tau)+f'(z)$ es una función elíptica con a lo más polos simples en Λ y la Proposición 2.2 implica que es una constante. $\square$

La posibilidad de representar θ con la serie (16) que la define o con la fórmula de triple producto de Jacobi y relacionarla con las funciones elípticas a través de (25) y el Teorema 3.1

abre la puerta a una serie de identidades insospechadas. Uno de los más originales artífices de identidades inusuales fue Ramanujan, bien conocido por su instrucción autodidacta. Dentro de su producción, posiblemente los resultados con implicaciones más profundas sean los relativos a funciones elípticas y modulares (en gran medida recogidos y demostrados en [3]). Los métodos de Ramanujan para conseguirlos están abiertos a especulación porque en su mayoría no disponemos de las pruebas originales y es un reto para los historiadores de la Ciencia explicar cómo estuvieron al alcance de alguien con pobres conocimientos de variable compleja.

Referencias

[1] G. E. Andrews. A simple proof of Jacobi's triple product identity. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16:333–334, 1965.

[2] J. V. Armitage and W. F. Eberlein. *Elliptic functions*, volume 67 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[3] B. C. Berndt. *Ramanujan's notebooks. Part III*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] G. H. Hardy. *The integration of functions of a single variable*. Hafner Publishing Co., New York, 1971. Reprint of the second edition, 1916, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 2.

[5] A. W. Knapp. *Elliptic curves*, volume 40 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.

[6] B. L. Laptev, B. A. Rozenfel′d, and A. I. Markushevich. *Mathematics of the 19th century*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1996. Geometry, analytic function theory, With a bibliography by F. A. Medvedev, Edited and with a preface by A. N. Kolmogorov and A. P. Yushkevich, Translated from the 1981 Russian original by Roger Cooke.

[7] H. Rademacher. *Topics in analytic number theory*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. Edited by E. Grosswald, J. Lehner and M. Newman, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 169.

[8] A. Weil. *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 88.

[9] R. O. Wells. The origins of complex geometry in the 19th century. Preprint 2015, `https://arxiv.org/abs/1504.04405`.