Capítulo 8

Ceros y crecimiento

ALGUNOS HÉROES: Jensen, Hadamard, ...

Recordemos la notación $\mathcal{Z}_f$, estándar a estas alturas, que usamos para denotar el conjunto de ceros de una función holomorfa f en un dominio Ω:

$$\mathcal{Z}_f = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}\,.$$

8.1. Contando ceros: Fórmula de Jensen

En la fórmula de Jensen que da título a este apartado, un «cierto» recuento de los ceros de una función holomorfa $f(z)$ en un disco $\mathbb{D}(0,R)$ se expresa como una «cierta» integral que involucra a la función f sobre $\partial\mathbb{D}(0,R)$. Esta fórmula de Jensen nos va a permitir extraer información valiosa sobre la estrecha relación que hay entre ceros y crecimiento de las funciones holomorfas que es el tema de este capítulo.

Por cierto, Jensen era empleado de la compañía telefónica danesa. El artículo de Johan (Ludwig William Valdemar) Jensen que contiene los resultados de este capítulo se titula ufana y ajustadamente *Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions*[1], y a fe que no iba descaminado.

El lector meticuloso argüirá en este punto, amablemente como siempre, que ya el principio del argumento, tan útil y elegante, con ese toque Rouché, nos da una expresión de similar naturaleza: ceros de f en $\mathbb{D}(0,R)$ en un lado e integral que involucra f sobre $\partial\mathbb{D}(0,R)$ en el otro. Y, en efecto, así es, y como veremos, estas dos expresiones (principio del argumento y fórmula de Jensen) están emparentadas.

En lo que sigue, $f(z)$ es una función holomorfa en $\mathbb{D}(0,R)$ y no idénticamente nula. Para cada $r \in (0,R)$, denotaremos por $n(r)$ al número (finito, pues $f \not\equiv 0$) de ceros que f tiene en el disco *cerrado* $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$. La función $n(r)$ es no decreciente, constante a trozos y continua por la derecha. La función $n(r)$ es el objetivo de estudio de este apartado. Por abreviar, no decoramos $n(r)$ haciendo referencia a f y escribiendo $n_f(r)$, pues la función $f(z)$ está fija.

• El principio del argumento nos dice que si $0 < r < R$ y la función f no se anula en la circunferencia $|z| = r$ entonces

$$(\star) \qquad n(r) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{|z|=r}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f'(re^{\imath\theta})re^{\imath\theta}}{f(re^{\imath\theta})}d\theta\,.$$

Observe lector que como $n(r)$ es un número real (de hecho, un número natural), la parte imaginaria de la integral anterior ha de ser 0, de manera que

$$(\sharp) \quad n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Re\Big(\frac{f'(re^{\imath\theta})re^{\imath\theta}}{f(re^{\imath\theta})}\Big)d\theta\,.$$

• Analicemos el integrando $\Re\big(f'(re^{\imath\theta})re^{\imath\theta}/f(re^{\imath\theta})\big)$ de $(\sharp)$.

En cada punto z_0 de $\partial\mathbb{D}(0,r)$ la función f no se anula, así que en un entorno de z_0 la función f tiene un logaritmo holomorfo.

Fijemos $z_0 = re^{\imath\theta_0}$ con $|z_0| = r$. Pongamos que en un disco $U = \mathbb{D}(z_0,\delta)$, con $\delta > 0$, la función f se escribe $f \equiv e^g$, donde g es holomorfa en U y escribamos $g \equiv u + \imath v$, donde $u = \Re(g) = \ln|f|$ y $v = \Im(g)$.

[1]El artículo es de hecho una carta de Jensen a Mittag-Leffler, editor de Acta Mathematica. No me resisto a transcribir su comienzo: *Durante su última visita a Copenhagen tuve el honor de hablar con usted sobre una integral definida que si no me equivoco está llamada a desempeñar un papel en la teoría de funciones analíticas. Como me pareció que esta cuestión le interesaba vivamente, he aprovechado esta ocasión –el envío de dos cortas memorias con destino a su revista– para comunicarle el desarrollo detallado de mi teorema.*

Importa señalar que la parte imaginaria v es un argumento continuo de f definido tan sólo en U, mientras que $\ln|f|$ es una función armónica definida en $\mathbb{D}(0,R)\setminus\mathcal{Z}_f$ y que u es simplemente la restricción de $\ln|f|$ al disco U.

Usando las ecuaciones de Cauchy–Riemann en coordenadas polares, obtenemos para $g'(z_0)$ las dos expresiones siguientes:

$$g'(z_0)=e^{-\imath\theta_0}\Big(\partial_r u(z_0)-\frac{\imath}{r}\partial_\theta u(z_0)\Big)=e^{-\imath\theta_0}\Big(\frac{1}{r}\partial_\theta v(z_0)+\imath\partial_r v(z_0)\Big)\,.$$

Por tanto,

$$g'(z_0)\,z_0=(r\partial_r u(z_0)-\imath\,\partial_\theta u(z_0))=(\partial_\theta v(z_0)+\imath r\partial_r v(z_0))\,,$$

y, aún más,

$$\Re(g'(z_0)\,z_0)=r\partial_r u(z_0)=\partial_\theta v(z_0)\,.$$

Como

$$\frac{f'(z_0)\,z_0}{f(z_0)}=g'(z_0)\,z_0\,,$$

obtenemos las dos siguientes expresiones para el integrando de ($\sharp$) que nos da $n(r)$:

$$\Re\Big(\frac{f'(z_0)\,z_0}{f(z_0)}\Big)=r\partial_r u(z_0)=\partial_\theta v(z_0)\,.$$

En realidad, para todo $z\in U\cap\partial\mathbb{D}(0,r)$, se tiene que

$$(\sharp\sharp)\quad \Re\Big(\frac{f'(z)\,z}{f(z)}\Big)\overset{\text{(a)}}{=}r\partial_r u(z)\overset{\text{(b)}}{=}\partial_\theta v(z)$$

Sacamos ahora rendimiento a estas dos expresiones (a) y (b) de ($\sharp\sharp$).

• *Expresión (b) de* ($\sharp\sharp$): La expresión (b) es sólo *local*. Aún así, cubriendo el conjunto compacto $\partial\mathbb{D}(0,r)$ con un número finito de discos como U y entrelazando adecuadamente los sucesivos argumentos de f, se obtiene la interpretación usual que se recoge en el apelativo de principio del argumento:

$$n(r)=\frac{1}{2\pi}\Delta_{|z|=r}\arg_f=\frac{1}{2\pi}[\text{variación del argumento de } f(z) \text{ cuando } z \text{ recorre } |z|=r]\,.$$

• *Expresión (a) de* ($\sharp\sharp$): La ventaja de la expresión (a) es que, como hemos apuntado más arriba, $u\equiv\ln|f|$ está *globalmente* definida y nos da que

$$n(r)=r\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\partial_r\ln|f(re^{\imath\theta})|d\theta\,.$$

Esta expresión invita a "sacar ∂_r"de dentro de la integral (movimiento legal, pues, por ejemplo, $\partial^2_{rr}\ln|f|$ está acotado en un entorno de $|z|=r$ donde f no se anula) y escribir

$$(\star\star)\quad \frac{n(r)}{r}=\partial_r\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{\imath\theta})|d\theta\Big)\,,$$

quien a su vez clama estentóreamente por ser integrado, ¿verdad?, lector, digamos entre $r = 0$ y $r = s$, con $s < R$.

En este enfoque, de ansia integradora, surge inmediatamente una dificultad. Veamos. La expresion $(\star)$, y por ende, $(\star\star)$, requiere que $f(z)$ no se anule en $|z| = r$, y el problema es que al integrarla entre 0 y s en general se pasa por valores de r donde sí hay ceros de $f(z)$ en $|z| = r$. De hecho, ahí está el busilis y la gracia, como seguidamente veremos. En cualquier caso, el argumento que acabamos de esbozar, recoge la idea, que no la demostración, de la fórmula de Jensen, que nos ocupará seguidamente.

8.1.1. Fórmula de Jensen.

Enunciamos:

Teorema 8.1 (Fórmula de Jensen.) *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}(0, R)$ y tal que $f(0) \neq 0$. Entonces, para todo r, tal que $0 \leq r < R$ se tiene que*

$$\boxed{\int_0^r \frac{n(s)}{s}\, ds = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{\imath\theta})|\, d\theta\Big) - \ln|f(0)|}$$

Observe lector que no hay restricción sobre si f se anula o no en $\partial\mathbb{D}(0, r)$. Además, el número de ceros (en versión integrada) se expresa sólo en términos de $|f|$. ¡Vaya!

Más adelante daremos la demostración completa de la fórmula de Jensen, pero antes, lector, permítanos que analicemos el término de recuento de ceros de la fórmula de Jensen, para obtener una expresión alternativa, que llamaremos fórmula de Jensen bis.[2]

Como vamos a verificar a continuación con un argumento de integración por partes, el término de la izquierda de la fórmula de Jensen, es decir, la integral sobre el *número* de ceros, se puede expresar en función de los *módulos* de los ceros de f.

Lema 8.2 *Sea $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números en $\mathbb{D}(0, R)$, tal que $b_1 \neq 0$, tal que $|b_{n+1}| \geq |b_n|$ para $n \geq 1$y tal que $\lim_{n\to\infty} |b_n| = R$. Definamos el contador N como la función que a cada $s \in (0, R)$ le asocia el número $N(s)$ que cuenta cuántos b_n hay en $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(0, s))$:*

$$N(s) = \sharp\big\{n \geq 1 : |b_n| \leq s\big\}$$

Entonces, para cada $r \in (0, R)$ se tiene que

$$\int_0^r \frac{N(s)}{s}\, ds = \sum_{n=1}^{N(r)} \ln\Big(\frac{r}{|b_n|}\Big)\,.$$

Señalamos, lector, que si los b_n son un conjunto finito, en lugar de ser una sucesión infinita, el resultado del lema es igualmente válido.

[2]Gracias por ese alarde de creatividad nominativa.

DEMOSTRACIÓN. Si tenemos en cuenta que $(d/ds)N(s) = N'(s)$ es una suma de deltas de Dirac en los $|b_n|$ obtenemos, por integración por partes, que

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{N(s)}{s}\,ds &= N(s)\ln(s)\Big|_{s=0}^{s=r} - \int_0^r N'(s)\ln(s)\,ds\\ &= N(r)\ln(r) - \sum_{n=1}^{N(r)} \ln(|b_n|) = \sum_{n=1}^{N(r)} \ln\Big(\frac{r}{|b_n|}\Big)\,.\end{aligned}$$

Observe lector cómo hemos usado que $N(s) = 0$ si $s < |b_1|$. Si prefiere, lector, no usar deltas de Dirac, puede interpretar el cálculo anterior en el marco de integración de Riemann-Stieltjes.

Alternativamente, con un mínimo de parafernalia matemática, podemos comprobar como sigue la veracidad del lema 8.2. Fijemos $r \in (0, R)$, pongamos $N = N(r)$, y denotemos $r_j = |b_j|$, para $1 \le j \le N$. Partiendo la integral, obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{N(s)}{s}\,ds &= \sum_{j=1}^{N-1}\int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{N(s)}{s}\,ds + \int_{r_N}^{r} \frac{N(s)}{s}\,ds = \sum_{j=1}^{N-1} j\int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{1}{s}\,ds + N\ln(r/r_N)\\ &= \sum_{j=1}^{N-1} j\big(\ln(r_{j+1}) - \ln(r_j)\big) + N\ln(r/r_N)\\ &= (N-1)\ln(r_N) + \sum_{j=2}^{N-1}\ln(1/r_j) + \ln(1/r_1) + N\ln(r/r_N) = \sum_{j=1}^{N}\ln\Big(\frac{r}{r_j}\Big)\,,\end{aligned}$$

donde en el penúltimo paso hemos aplicado parsimoniosamente un argumento de sumación por partes. ■

☞ **Nota** 8.1.1. ☜ Con la notación y el mismo argumento de la demostración del lema 8.2, se obtiene que si ϕ es una función real derivable en $(0, R)$ entonces

$$\int_0^r N(s)\phi'(s)\,ds = N(r)\phi(r) - \sum_{n=1}^{N}(r)\phi(|b_n|)\,.$$

El caso del enunciado corresponde a $\phi(s) = \ln s$. ♠

Como consecuencia del lema 8.2 se tiene la siguiente versión equivalente y alternativa de la fórmula de Jensen:

Teorema 8.3 (Fórmula de Jensen bis) *Sea f una función holomorfa en el disco $\mathbb{D}(0, R)$ y tal que $f(0) \neq 0$. Entonces, para todo radio r con $0 \le r < R$ se tiene que*

$$\boxed{\sum_{a\in\mathcal{Z}_f} \ln^+\Big(\frac{r}{|a|}\Big) = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{\imath\theta})|\,d\theta\Big) - \ln|f(0)|}$$

Para cada $r < R$, en el término de la izquierda se suma un número finito de términos pues en ella sólo intervienen los ceros de f con módulo que no excede r y estos ceros conforman un conjunto finito.

Con $\ln^+$ se denota la parte positiva de ln, es decir, que si $x > 0$ entonces $\ln^+ x = \ln x$ si $x \geq 1$ y $\ln^+ x = 0$ si $0 < x \leq 1$.

DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA DE JENSEN: TEOREMAS 8.1 Y 8.3. Probaremos, de hecho, la fórmula bis, teorema 8.3. Por mor de claridad de exposición, procedemos en tres etapas de creciente generalidad.

Fijemos $r < R$.

a) *Supongamos que f no se anula en* $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,r))$.

En este caso, podemos tomar un logaritmo de f holomorfo en un abierto que contiene a $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,r))$ y que denotamos simplemente por $\ln f$.

Por la fórmula de Cauchy tenemos que

$$\frac{1}{2\pi\imath}\int_{|z|=r} \ln f(z)\frac{dz}{z} = \ln f(0)\,,$$

es decir,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln f(re^{\imath\theta})\,d\theta = \ln f(0)\,.$$

Si en esta identidad tomamos partes reales se deduce que

$$(\star)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{\imath\theta})|\,d\theta = \ln|f(0)|\,,$$

que es la fórmula de Jensen bis en este caso (a) tan particular.

☞ **Nota** 8.1.2. ☜ Para obtener la identidad ($\star$) podíamos haber usado en este caso (a) que $\ln|f|$ es una función armónica en un abierto que contiene a $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,r))$ y apelado al teorema del valor medio de funciones armónicas. ♠

b) *Supongamos que f no se anula en $\partial\mathbb{D}(0,r)$.*

Denotemos los ceros de f en $\mathbb{D}(0,r)$ por $a_1, a_2, \ldots, a_N$ con $N = n(r)$; recuérdese que, por hipótesis, $a_n \neq 0$ para $1 \leq n \leq N$.

Consideremos el producto de tipo Blaschke B en $\mathbb{D}(0,r)$ que se anula en estos a_n, es decir,

$$B(z) = \prod_{n=1}^{N} \frac{r(z-a_j)}{r^2 - z\overline{a_j}}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

La función B es holomorfa en un abierto que contiene a $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,r))$, se anula en los a_n y es tal que $|B(z)| = 1$, si $|z| = r$.

Por consiguiente, la función cociente $g \equiv f/B$ es holomorfa en un abierto que contiene a $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,r))$, no se anula en $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,r))$ y es tal que $|g(z)| = |f(z)|$, para cada $z \in \partial\mathbb{D}(0,r)$. Además,

$$|g(0)| = \frac{|f(0)|}{|B(0)|} = |f(0)| \prod_{n=1}^{N} \frac{r}{|a_n|}\,.$$

La parte a) aplicada a la función g nos da que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|g(re^{\imath\theta})|\, d\theta = \ln|g(0)|\,,$$

lo que traducido a la función f dice que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{\imath\theta})|\, d\theta = \ln|f(0)| + \sum_{N=1}^{N} \ln\Big(\frac{r}{|a_n|}\Big)\,,$$

que es la fórmula de Jensen bis en este caso b) menos particular que el caso a), pero aún restrictivo.

c) *Caso general.*

Resta considerar e incorporar al análisis los ceros que la función f pudiera tener en $\partial\mathbb{D}(0,r)$. Denotemos estos ceros por $b_j = r\, e^{\imath\varphi_j}$, para, digamos $1 \le j \le k$.

Los ceros de f en $\mathbb{D}(0,r)$ se denotan como antes por a_n, para, digamos, $1 \le n \le m$. De manera que $m + k = n(r)$.

Consideremos ahora la función auxiliar g dada por

$$g(z) = f(z) \prod_{j=1}^{k} \frac{b_j}{b_j - z}\,.$$

Esta función g es holomorfa en un abierto que contiene a $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,r))$, se anula en los a_n, pero no en los b_j, (y, por tanto, no se anula en $\partial\mathbb{D}(0,r)$) y además verifica que $g(0) = f(0)$. Además, en $\partial\mathbb{D}(0,r)$, se cumple

$$|g(r\, e^{\imath\theta})| = |f(r\, e^{\imath\theta})| \prod_{j=1}^{k} \Big|\frac{1}{1 - e^{\imath(\theta-\varphi_j)}}\Big|\,, \quad \text{para todo } \theta \in [0, 2\pi]\,.$$

Si ahora aplicamos la parte b) a la función g al tiempo que vamos traduciendo en términos de la función f, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{\imath\theta})|\,d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|g(re^{\imath\theta})|\,d\theta + \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|1-e^{-\imath(\theta-\varphi_j)}\right|d\theta\\
&= \ln|g(0)| + \sum_{j=1}^{m}\ln\Big(\frac{r}{|a_j|}\Big) + \frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|1-e^{\imath\theta}\right|d\theta\\
&= \ln|f(0)| + \sum_{j=1}^{m}\ln\Big(\frac{r}{|a_j|}\Big) + \sum_{j=1}^{k}\ln\Big(\frac{r}{|b_j|}\Big) + \frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|1-e^{\imath\theta}\right|d\theta\\
&= \ln|f(0)| + \sum_{\substack{a\in\mathcal{Z}_f;\\ |a|\le r}}\ln\Big(\frac{r}{|a|}\Big) + \frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|1-e^{\imath\theta}\right|d\theta\,.
\end{aligned}$$

En el penúltimo paso hemos introducido subrepticiamente el sumando $\sum_{j=1}^{k}\ln(r/|b_j|)$, que vale 0, pues los b_j tienen módulo $|b_j| = r$. Hemos usado, además, que

$$\int_0^{2\pi}\ln\left|1-e^{-\imath(\theta-\varphi_j)}\right|d\theta = \int_0^{2\pi}\ln\left|1-e^{\imath\theta}\right|d\theta\,,\quad \text{para todo } 1\le j\le k\,.$$

Esta es la fórmula de Jensen, excepto por ese sumando $\frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|1-e^{\imath\theta}\right|d\theta$, que el siguiente lema nos confirmará que ¡vale 0!, completando así la demostración de la fórmula de Jensen. ■

Lema 8.4 (Lema de Jensen) *Para todo $r>0$, se tiene que*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|1-re^{\imath\theta}|\,d\theta = \ln^+ r\,.$$

Es decir, la integral vale 0 para $0<r\le 1$, y vale $\ln r$ para $r\ge 1$.

En la demostración de la fórmula de Jensen que acabamos de desarrollar se ha apelado al caso $r=1$ de este lema de Jensen. Si la integral para $r=1$ no fuera 0, que lo es, tendríamos una fórmula de Jensen no tan redonda y práctica, pero una fórmula general, y, probablemente casi tan útil, y el valor de la integral $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|1-re^{\imath\theta}|\,d\theta$ sería[3] conocido mundanamente como constante de Jensen.

Hacemos notar que, para cada $r>0$, la función real $\theta\mapsto\ln|1-r\,e^{\imath\theta}|$ es absolutamente integrable en el intervalo $[0,2\pi]$. Para $r\neq 1$, baste observar que la tal función está acotada. Para $r=1$, esta función se hace infinito en 0 y en 2π, pero ambas son singularidades integrables; por ejemplo, cerca de $\theta=0$, el valor absoluto de la función se comporta como $\ln(1/\theta)$.

[3]¡Perdón!, por la ciencia ficción, que no ficción científica.

DEMOSTRACIÓN. Tomamos en $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ la rama principal del logaritmo Ln para definir la función g holomorfa en $\mathbb{C}\setminus[1,+\infty)$ dada por

$$g(z)=\mathrm{Ln}(1-z)\,,\quad \text{para todo } z\in\mathbb{C}\setminus[1,+\infty)\,.$$

Obsérvese que $g(0)=0$, que g es, en particular, holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D}$ y que $\Re g(z)=\ln|1-z|$, para cada $z\in\mathbb{C}\setminus[1,+\infty)$.

Discutimos primero los casos, $0<r<1$ y $r>1$.

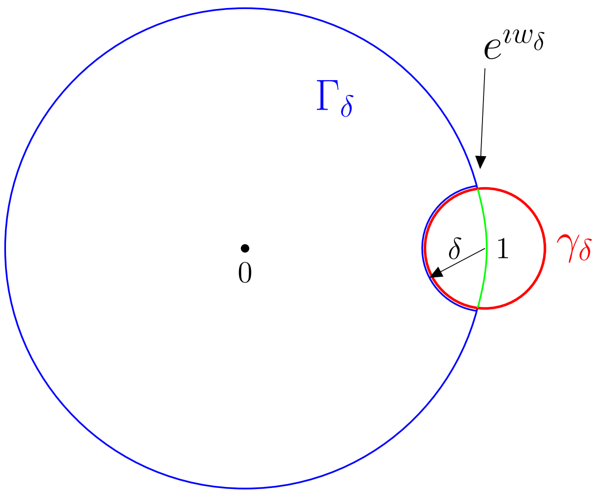
• Caso $0<r<1$. En virtud de la fórmula de Cauchy para $g(0)$ (tomando luego partes reales) o bien como consecuencia del teorema del valor medio de funciones armónicas se tiene que

$$(\flat)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|1-re^{\imath\theta}|\,d\theta=0\,,\quad \text{para } 0<r<1\,.$$

• Caso $r>1$. Reducimos al caso anterior; basta observar que $\ln|1-re^{\imath\theta}|=\ln(r)+\ln|1/r-e^{\imath\theta}|=\ln(r)+\ln|(1/r)e^{-\imath\theta}-1|$, para concluir, usando que $(1/r)<1$ y $(\flat)$, que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|1-re^{\imath\theta}|\,d\theta&=\ln(r)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|1-(1/r)e^{-\imath\theta}|\,d\theta\\&=\ln(r)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|1-(1/r)e^{\imath\theta}|\,d\theta=\ln(r)\,.\end{aligned}$$

Vamos ya con el caso restante y más relevante: $r=1$. La clave del argumento yace en gestionar la singularidad (débil) que el integrando $\ln|1-z|$ tiene en $z=1$.



Dibujo 8.1. INTEGRAL DE JENSEN.

Para $\delta \in (0,1)$, sea γ_δ la circunferencia $|z-1| = \delta$. Para $z \in \gamma_\delta$ se tiene que $|g(z)| \le \ln(1/\delta) + 2\pi$, y que $|z| \ge 1-\delta$, por tanto, podemos acotar

$$\int_{\gamma_\delta} \Big|\frac{g(z)}{z}\Big|\,|dz| \le \frac{\ln(1/\delta)+2\pi}{1-\delta} 2\pi\delta\,,$$

y concluir, por consiguiente, que así que

$$(\dagger) \qquad \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\gamma_\delta} \Big|\frac{g(z)}{z}\Big|\,|dz| = 0\,.$$

Sea Γ_δ la curva simple cerrada frontera de $\{z \in \mathbb{D}; |z-1| \ge \delta\}$. Por la fórmula de Cauchy se tiene que

$$0 = 2\pi\imath g(0) = \int_{\Gamma_\delta} \frac{g(z)}{z}\,dz = \int_{\omega_\delta}^{2\pi-\omega_\delta} \ln|1-e^{\imath\theta}|\,d\theta + \int_{z\in\mathbb{D};\,|z-1|=\delta} \frac{g(z)}{z}\,dz$$

donde $e^{\imath\omega_\delta}$ es el punto de corte de $\partial\mathbb{D}$ con $\partial\mathbb{D}(1,\delta)$ en el semiplano superior. Observe lector que $\omega_\delta \to 0$, cuando $\delta \to 0$.

Por tanto,

$$\int_{\omega_\delta}^{2\pi-\omega_\delta} \ln|1-e^{\imath\theta}|\,d\theta = -\int_{z\in\mathbb{D};\,|z-1|=\delta} \frac{g(z)}{z}\,dz\,,$$

de donde

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\omega_\delta}^{2\pi-\omega_\delta} \ln|1-e^{\imath\theta}|\,d\theta\Big| &= \Big|\int_{z\in\mathbb{D};\,|z-1|=\delta} \frac{g(z)}{z}\,dz\Big| \\ &\le \int_{z\in\mathbb{D};\,|z-1|=\delta} \Big|\frac{g(z)}{z}\Big|\,dz \le \int_{\gamma_\delta} \Big|\frac{g(z)}{z}\Big|\,|dz|\end{aligned}$$

En conclusión, en virtud de $(\dagger)$, se tiene que

$$\int_0^{2\pi} \ln|1-e^{\imath\theta}|\,d\theta = \lim_{\delta\to 0} \int_{\omega_\delta}^{2\pi-\omega_\delta} \ln|1-e^{\imath\theta}|\,d\theta = 0\,.$$

■

☞ **Nota** 8.1.3. ☜ Damos a continuación una prueba directa y alternativa del caso $r=1$ del lema de Jensen 8.4. Este es un **argumento real de autosimilitud**.

Observe lector que

$$\ln|1-e^{\imath\theta}| = \ln(2) + \ln(\operatorname{sen}(\theta/2)), \quad \text{para todo } \theta \in [0,2\pi].$$

De manera que el caso $r=1$ del lema 8.4 equivale a comprobar que

$$\int_0^{2\pi} \ln(\operatorname{sen}(\theta/2))\,d\theta = -2\pi\ln(2)$$

o, equivalentemente, con un cambio de variables, a probar que

$$J \triangleq \int_0^{\pi} \ln(\operatorname{sen}(\theta))\,d\theta = -\pi\ln(2)\,.$$

Usando que $\operatorname{sen}(\theta) = 2\operatorname{sen}(\theta/2)\cos(\theta/2)$, tenemos

$$J = \pi \ln 2 + \int_0^\pi \ln(\operatorname{sen}(\theta/2))\, d\theta + \int_0^\pi \ln(\cos(\theta/2))\, d\theta\,.$$

Con el cambio de variables $\theta/2 = \varphi$ en la primera integral y $\theta/2 = \pi/2 - \varphi$ en la segunda integral, obtenemos que

$$J = \pi \ln 2 + 2\int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen}(\varphi))\, d\varphi + 2\int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen}(\varphi))\, d\varphi = \pi \ln 2 + 4\int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen}(\varphi))\, d\varphi\,,$$

y como, por simetría, $\int_0^\pi \ln(\operatorname{sen}(\varphi))\, d\varphi = 2\int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen}(\varphi))\, d\varphi$, se deduce que

$$J = \pi \ln 2 + 2\int_0^{\pi} \ln(\operatorname{sen}(\varphi))\, d\varphi = \pi \ln 2 + 2J\,,$$

de donde el resultado. ♠

☞ **Nota** 8.1.4. ☜ Lector, una vuelta de tuerca más al místico, aunque sencillo, resultado, de que

$$\int_0^{2\pi} \ln|1 - e^{\imath\theta}|\, d\theta = 0\,,$$

el caso $r = 1$ del lema 8.4.[4] Observe lector que esa identidad equivale a que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\frac{1}{1-\cos\theta}\, d\theta = \ln 2\,,$$

Escribirlo así tiene la ventaja de que el integrando es positivo.

Para $x \in (-1, 1)$ se tiene, (consulte lector, si le parece, el ejemplo 9.1.2), que

$$\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n}\,.$$

De manera que para $\theta \in [0, 2\pi]$ se tiene que

$$\ln\frac{1}{1-\cos\theta} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos^n\theta}{n}\,, \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{|\cos\theta|^n}{n} = \ln\frac{1}{1-|\cos\theta|}\,.$$

Como la función $\theta \mapsto \ln\frac{1}{1-|\cos\theta|}$ es integrable en $[0, 2\pi]$, convergencia dominada, nos dice que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\frac{1}{1-\cos\theta}\, d\theta = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^n\theta}{n}\, d\theta\,.$$

Las integrales con n impar son nulas, así que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\frac{1}{1-\cos\theta}\, d\theta = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^{2k}\theta}{2k}\, d\theta\,.$$

Escribiendo $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{\imath\theta} + e^{-\imath\theta})$ y usando el binomio de Newton vemos que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^{2k}\theta}{2k}\, d\theta = \binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}\frac{1}{2k}\,, \quad \text{para todo } k \geq 1\,.$$

[4] ¿Otra?

Así que obtenemos que

$$(\sharp) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\binom{2k}{k}\frac{1}{4^k} = \ln 4\,.$$

¡Vaya, vaya!

En realidad, la suma de la serie de ($\sharp$) equivale al caso $r = 1$ del lema 8.4. Más adelante, véase el ejemplo 9.5.5, comprobaremos la suma de la siguiente serie, bien próxima a la anterior,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\frac{1}{4^k} = 1\,.$$

Lo dicho, un punto de misticismo. ______________________ ♠

☞ **Nota** 8.1.5. ☜ Todavía otro enfoque más, para probar[5] el lema 8.4.

Fijemos un entero $N \geq 2$. La raíces N-ésimas de la unidad son $\omega_j = \exp\big(2\pi\imath\, j/N\big)$, para $0 \leq j < N$. Podemos factorizar $1 - z^N$ en la forma

$$1 - z^N = \prod_{j=0}^{N-1}(1 - z/w_j) = (1 - z)\prod_{j=1}^{N-1}(1 - z/w_j)$$

Por tanto,

$$\frac{1 - z^N}{1 - z} = \prod_{j=1}^{N-1}(1 - z/w_j)\,, \quad \text{para } z \neq 1$$

Tomando el límite de esta expresión cuando $N \to 1$, obtenemos

$$N = \prod_{j=1}^{N-1}(1 - \overline{w_j})$$

Tomando módulos, obtenemos enseguida que

$$N = 2^{N-1}\prod_{j=1}^{N-1}\operatorname{sen}\big(\frac{\pi j}{N}\big)$$

Reemplazando N por $2N$ y aprovechando la simetría de la función seno

$$N = 4^{N-1}\prod_{j=1}^{2N-1}\operatorname{sen}\big(\frac{\pi j}{2N}\big) = 4^{N-1}\Big(\prod_{j=1}^{N-1}\operatorname{sen}\Big(\frac{\pi j}{2N}\Big)\Big)^2$$

donde hemos usado además que para $j = N$ el factor correspondiente es 1.

En suma,

$$\sqrt{N} = 2^{N-1}\prod_{j=1}^{N-1}\operatorname{sen}\big(\frac{\pi j}{2N}\big)\,, \quad \text{para } N \geq 1$$

Esta identidad es válida para $N = 1$ entendiendo que un producto vacío de senos es 1.

Tomando logaritmos, dividiendo por N y pasando al límite se deduce que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-1} \ln\frac{1}{\operatorname{sen}\Big(\dfrac{\pi j}{2N}\Big)} = \ln(2)\,.$$

Usando que $-\ln(\operatorname{sen}(x))$ es creciente en el intervalo $[0, \pi/2]$ se obtiene que

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\ln\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi j/(2N))} \leq \int_0^1 \ln\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi x/2)}\,dx \leq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\ln\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi j(2N))} + \int_0^{1/N}\ln\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi x/2)}\,dx$$

[5] Pero, bueno, ¡qué obsesión!

de donde

$$\int_0^1 \ln \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi x/2)}\, dx = \ln(2)\,.$$

El cambio de variables $y = \pi x/2$, nos da que

$$\int_0^{\pi/2} \ln \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\, dx = (\pi/2)\ln(2)\,.$$

La simetría de $\operatorname{sen}(x)$ más un cambio de signo nos da la integral J de la nota 8.1.3:

$$J = \int_0^{\pi} \ln \operatorname{sen}(x)\, dx = -\pi \ln(2)\,,$$

que es lo buscado, ________________ ♠

EJEMPLO 8.1.1 *Teorema fundamental del álgebra como consecuencia de la fórmula de Jensen.*

Tenemos un polinomio $P(z)$ de grado n. Dividiendo por $z-a$ si a es una raíz, observamos ab initio que P tiene un número finito de ceros, digamos k, y claro, $k \le n$. Queremos verificar que $k = n$. Podemos suponer que $P(0) \neq 0$. Si no fuera $P(0) = 0$, dividiríamos por z y tanto el grado de P como el número de sus raíces bajarían en una unidad. Podemos suponer además que P es mónico (pura estética).

Como P tiene grado n y es mónico, se tiene que $\lim_{|z|\to\infty} |P(z)|/|z|^n = 1$. De ahí se deduce que

$$\lim_{r\to\infty} \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|P(re^{\imath\theta})|\, d\theta - n\ln r = 0\,,$$

de donde

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln|P(re^{\imath\theta})|\, d\theta}{\ln(r)} = n\,.$$

Por otro lado, como para cada $a \neq 0$ fijo se tiene que $\lim_{r\to\infty} \ln(r/|a|)/\ln r = 1$, y como $\mathcal{Z}_P$ tiene k elementos, se deduce que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\sum_{a\in\mathcal{Z}_P} \ln(r/|a|)}{\ln(r)} = k\,.$$

La fórmula de Jensen, usando que $\ln|P(0)|/\ln r$ tiende a 0 cuando $r\to\infty$, nos da que $n = k$. ♣

8.1.2. Fórmula de Poisson-Jensen

Fijemos en este apartado una función f holomorfa en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$. La fórmula de Jensen (con $r = 1$) se puede escribir, en término de longitud de arco $|dz|$, en la forma que

$$(\natural)\qquad \sum_{a\in\mathcal{Z}_f}^{\infty} \ln\Big(\frac{1}{|a|}\Big) = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} \ln|f(z)|\,|dz|\Big) - \ln|f(0)|\,,$$

siempre que $f(0) \neq 0$.

Vamos a llevar a cabo un cambio de variable en la fórmula ($\natural$), para así obtener una versión invariante de la fórmula de Jensen.

Primero fijamos $w \in \mathbb{D}$, que no sea cero de f. Y consideremos la función $g(z) = (f \circ T_w)(z)$.

Recuerde, lector, que T_w denota la transformación de Möbius dada por $T_w(z) = (z+w)/(1+z\overline{w})$. Usaremos asimismo la transformación de Möbius $S_w(z)$ dada por $S_w(z) = (z-w)/(1-z\overline{w})$. Observe, lector, además que $S_w \circ T_w$ es la identidad.

La función auxiliar g es holomorfa en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ y no se anula en $z=0$. Aplicamos seguidamente ($\natural$) a la función g. Observe, primero, lector que $g(0) = f(w)$ y que $\mathcal{Z}_g = \{b \in \mathbb{D} : T_w(b) \in \mathcal{Z}_f\} = S_w(\mathcal{Z}_f)$. Obtenemos

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}_f} \ln \frac{1}{|S_w(b)|} = \Big(\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \ln |f(T_w(z))|\, |dz|\Big) - \ln |f(w)|\,.$$

Si cambiamos variables en la integral poniendo $z = S_w(\hat{z})$ y observando que S_w lleva biyectivamente $\partial\mathbb{D}$ sobre sí mismo, se obtiene que

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}_f} \ln \frac{1}{|S_w(b)|} = \frac{1}{2\pi} \int_{|\hat{z}|=1} \ln |f(\hat{z})|\, \frac{1-|w|^2}{|1-\hat{z}\overline{w}|^2}\, |d\hat{z}| - \ln |f(w)|\,.$$

Si volvemos a denotar la variable de integración como z en lugar de $\hat{z}$ (estética, lector) y usamos la notación $\sigma[u,v]$ para denotar la distancia seudohiperbólica entre u y v con $u, v \in \mathbb{D}$ (vistazo, lector, al apartado 4.2.1), tenemos finalmente

$$\begin{aligned} \sum_{b \in \mathcal{Z}_f} \ln \frac{1}{\sigma[b,w]} &= \Big(\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \ln |f(z)|\, \frac{1-|w|^2}{|1-z\overline{w}|^2}\, |dz|\Big) - \ln |f(w)| \\ &= \Big(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(e^{\imath\theta})|\, \frac{1-|w|^2}{|e^{\imath\theta}-w|^2}\, d\theta\Big) - \ln |f(w)|\,. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Esta fórmula (8.1) se conoce en ciertos ambientes como **fórmula de Poisson-Jensen** y es válida siempre que $f(w) \neq 0$. El caso $w=0$ de (8.1) es la fórmula ($\natural$) de la que hemos partido en la presente discusión.

8.1.3. Fórmula de Jensen y funciones meromorfas

La fórmula de Jensen para funciones holomorfas se extiende, como vamos a verificar seguidamente, a una fórmula análoga para funciones meromorfas, en la que ahora intervienen tanto los ceros como los polos de la función.

Sea f una función meromorfa en el disco $\mathbb{D}(0,R)$. Para cada $r \in (0,R)$ denotemos con $n(r,0)$ y con $n(r,\infty_{\mathbb{C}})$, al número de ceros y de polos, respectivamente, de la función f en el disco cerrado $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,r))$.

Teorema 8.5 (Fórmula de Jensen, funciones meromorfas) *Sea f una función meromorfa en $\mathbb{D}(0,R)$, de manera que $z=0$ no sea ni cero de f ni polo de f. Entonces, para todo $r\in(0,R)$, se tiene que*

$$\int_0^r \frac{n(s,0)-n(s,\infty_{\mathbb{C}})}{s}\,ds=\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{\imath\theta})|\,d\theta\Big)-\ln|f(0)|\,.$$

También se tiene, en formato bis, que

$$\sum_{a\in\mathcal{Z}_f}^{\infty}\ln^+\Big(\frac{r}{|a|}\Big)-\sum_{b\in\mathcal{P}_f}^{\infty}\ln^+\Big(\frac{r}{|b|}\Big)=\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{\imath\theta})|\,d\theta\Big)-\ln|f(0)|\,,$$

donde $\mathcal{P}_f$ denota el conjunto de polos de la función f.

DEMOSTRACIÓN. Podemos factorizar la función f como cociente $f\equiv g/h$, donde g y h son funciones holomorfas en $\mathbb{D}(0,R)$ y que no tienen ceros comunes: $\mathcal{Z}_g\cap\mathcal{Z}_h=\emptyset$. Los ceros de f son los ceros de g, mientras que los polos de f son los ceros de h.

Fijemos $r\in(0,R)$. Como $z=0$ no es cero de f, entonces $z=0$ no es cero de g y la fórmula de Jensen aplicada a la función holomorfa g nos da que

$$\int_0^r \frac{n(s,0)}{s}\,ds=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|g(re^{\imath\theta})|\,d\theta-\ln|g(0)|\,.$$

Como $z=0$ no es polo de f, entonces $z=0$ no es cero de h y la fórmula de Jensen aplicada a la función holomorfa h nos da que

$$\int_0^r \frac{n(s,\infty_{\mathbb{C}})}{s}\,ds=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|h(re^{\imath\theta})|\,d\theta-\ln|h(0)|\,.$$

Restando estas dos expresiones se obtiene, como queríamos, que

$$\int_0^r \frac{n(s,0)-n(s,\infty_{\mathbb{C}})}{s}\,ds=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{\imath\theta})|\,d\theta-\ln|f(0)|\,.$$ ■

8.1.4. Fórmula de Jensen y teorema de Green

La fórmula de Green (una versión, vaya) nos dice que si Ω es un dominio acotado con frontera C^∞ y que si u,v son funciones $C^\infty\big(\operatorname{cl}(\Omega)\big)$, entonces

$$\text{(G)}\qquad \int_\Omega (u\Delta v-v\Delta u)\,dA=\int_{\partial\Omega}\Big(u\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}-v\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\Big)|dz|\,,$$

donde $\mathbf{n}$ es la normal unitaria exterior.

Fijemos $\varepsilon>0$. Aplicamos la fórmula (G) en el anillo $\Omega_\varepsilon=\{z\in\mathbb{C}:\varepsilon<|z|<1\}$, con $u=\phi\in C^\infty(\operatorname{cl}(\mathbb{D}))$ y con $v(z)=\ln(1/|z|)$.

Como $\Delta v \equiv 0$ en Ω_ε, tenemos que el lado izquierdo de (G) es

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u)\, dA = -\int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta\phi)(z)\, \ln\frac{1}{|z|}\, dA\,.$$

La frontera $\partial\Omega_\varepsilon$ se compone de la circunferencia unidad Γ_1 y de la circunferencia Γ_ε de radio ε alrededor de $z=0$.

Para $v = \ln(1/|z|)$, la derivada normal (exterior) es

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \equiv \begin{cases} -1, & \text{sobre } \Gamma_1 \\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & \text{sobre } \Gamma_\varepsilon \end{cases}$$

Como $v \equiv 0$ en Γ_1, se tiene que

$$\int_{\Gamma_1} \Big(u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\Big)|dz| = -\int_{|z|=1} \phi(z)|dz|\,.$$

Además,

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\, |dz| = \frac{1}{\varepsilon}\int_{|z|=\varepsilon} \phi(z)|dz| = \int_0^{2\pi} \phi(\varepsilon e^{\imath\theta})d\theta\,,$$

que converge a $2\pi\phi(0)$ cuando $\varepsilon \to 0$, mientras que

$$\Big|\int_{\Gamma_\varepsilon} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, |dz|\Big| \le \Big(\ln\frac{1}{\varepsilon}\Big)\, 2\pi\varepsilon\, \Big(\max_{|z|\le\varepsilon} |\nabla\phi(z)|\Big)\,,$$

que tiende a 0 cuando $\varepsilon \to 0$. Así que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} \Big(u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\Big)|dz| = 2\pi\phi(0)\,.$$

En consecuencia, haciendo $\varepsilon \to 0$, se tiene que

$$2\pi\phi(0) = \int_{|z|=1} \phi(z)|dz| - \int_{\mathbb{D}} \Delta\phi(z)\, \ln\frac{1}{|z|} dA\,. \quad \text{para toda } \phi \in C^\infty(\mathrm{cl}(\mathbb{D}))\,. \tag{8.2}$$

Si $\Delta\phi \equiv 0$ en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$, es decir, si ϕ es armónica en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$, entonces $\phi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\phi(z)|dz|$, como dicta el teorema del valor medio para funciones armónicas.

Por cierto, la exigencia de que $\phi \in C^\infty(\mathrm{cl}(\mathbb{D}))$ en (8.2) es abusiva, con C^2 bastaría.

☞ **Nota** 8.1.6. ☜ Si ϕ tiene soporte compacto contenido en $\mathbb{D}$, la fórmula (8.2) se reduce a $2\pi\phi(0) = \int_{\mathbb{D}} \Delta\phi(z)\, \ln|z| dA$ que le dice al lector versado que el laplaciano en el sentido de las distribuciones de $\ln|z|$ es $2\pi\delta_0$, donde δ_0 significa la delta de Dirac en $z=0$.

Si $\Delta\phi \ge 0$ en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$, entonces la fórmula (8.2) nos da que $\phi(0) \le \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\phi(z)|dz|$, mero reflejo, lector versado, de subarmonicidad. ♠

8.2. Ceros de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ acotadas

Supongamos que f es una función holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D}$ y acotada en $\mathbb{D}$; digamos que $|f(z)| \le M$, para cada $z \in \mathbb{D}$.

Vamos a ver seguidamente cómo se refleja sobre los ceros de f la acotación de su módulo.

Supongamos primero que $f(0) \neq 0$. La fórmula de Jensen nos dice que para todo $r \in (0,1)$ se tiene que

$$(\star) \qquad \sum_{a \in \mathcal{Z}_f; |a| \le r} \ln \frac{r}{|a|} = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln |f(re^{\imath\theta})|\, d\theta\Big) - \ln|f(0)| \le \ln\Big(\frac{M}{|f(0)|}\Big)\,.$$

Observe, lector, cómo la cota de la derecha no depende del radio r. Queremos substituir $r=1$ en el lado izquierdo[6] de la desigualdad anterior. Y a fe que esta substitución es legal. Veamos. Fijemos, por el momento, $s \in (0,1)$. Entonces, para todo radio r tal que $s \le r < 1$ se tiene, en virtud de $(\star)$, que

$$\sum_{a \in \mathcal{Z}_f; |a| \le s} \ln \frac{r}{|a|} \le \sum_{a \in \mathcal{Z}_f; |a| \le r} \ln \frac{r}{|a|} \le \ln\Big(\frac{M}{|f(0)|}\Big)\,.$$

Manteniendo fijo $s \in (0,1)$ y haciendo $r \uparrow 1$ se deduce que

$$\sum_{a \in \mathcal{Z}_f; |a| \le s} \ln \frac{1}{|a|} \le \ln\Big(\frac{M}{|f(0)|}\Big)\,.$$

Liberando ahora s, se deduce que

$$(\flat') \qquad \sum_{a \in \mathcal{Z}_f} \ln \frac{1}{|a|} \le \ln\Big(\frac{M}{|f(0)|}\Big)\,.$$

Usando que $1 - x \le \ln(1/x)$ para cada $x \in (0,1)$, deducimos de $(\flat')$ que

$$(\flat) \qquad \sum_{a \in \mathcal{Z}_f} (1 - |a|) \le \ln\Big(\frac{M}{|f(0)|}\Big)\,.$$

Observe lector que para $|a| \to 1$ se tiene que $\ln(1/|a|) \sim 1 - |a|$; la ventajilla de $(\flat)$ sobre $(\flat')$ es que en $(\flat)$ el valor $a = 0$ no es tan especial: ya .

Si la función f se anula en $z = 0$, digamos de orden $k \ge 1$, consideramos la función auxiliar g tal que $g(z) = f(z)/z^k$, si $z \neq 0$, y $g(0) = f^{(k)}(0)/k!$. Esta función g es holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D}$. Por el principio del módulo máximo, para su módulo $|g|$ vale la misma cota M que para $|f|$; consulte, lector, si acaso, la nota

[6] ¡Qué listos, no hay r en el lado derecho!

8.2.1. Se cumple además que $\mathcal{Z}_g = \mathcal{Z}_f \setminus \{0\}$. La acotación ($\flat$) aplicada a la función g (que no se anula en $z=0$) nos da que

$$\sum_{a\in\mathcal{Z}_f\setminus\{0\}}(1-|a|) = \sum_{a\in\mathcal{Z}_g}(1-|a|) \le \ln\Big(\frac{M}{|g(0)|}\Big) = \ln\Big(\frac{M\,k!}{|f^{(k)}(0)|}\Big),$$

es decir,

$$\sum_{a\in\mathcal{Z}_f}(1-|a|) \le 1+\ln\Big(\frac{M\,k!}{|f^{(k)}(0)|}\Big).$$

Con todo esto hemos comprobado en suma que

Teorema 8.6 *Para toda función f holomorfa en $\mathbb{D}$ y acotada, se cumple que*

$$(\star)\qquad \sum_{a\in\mathcal{Z}_f}(1-|a|) < +\infty\,.$$

☞ **Nota** 8.2.1. ☜ Hemos dicho más arriba que si la función f holomorfa en $\mathbb{D}$ está acotada por M y tiene un cero de orden k en $z=0$ entonces la función g dada por $g(z)=f(z)/z^k$, que es holomorfa en $\mathbb{D}$, está asimismo acotada por M.

El detalle de la razón, que con seguridad el lector ha suministrado por su propia cuenta, es como sigue. Fijemos $z\in\mathbb{D}$ y r tal que $|z|<r<1$. Por el principio del módulo máximo se tiene que

$$|g(z)| \le \text{máx}\big\{|g(w)| : |w|=r\big\} = \frac{1}{r^k}\,\text{máx}\big\{|f(w)| : |w|=r\big\} \le \frac{M}{r^k}\,.$$

Haciendo $r\uparrow 1$, se deduce que $|g(z)|\le M$. ♠

☞ **Nota** 8.2.2. ☜ Podíamos haber obtenido el teorema 8.6 sin apelar a la fórmula de Jensen, simplemente como sigue: pongamos que f no se anula en $z=0$, que $|f|$ está acotada por 1 y que $a_1, a_2, \dots$ es una enumeración de los ceros de f. Fijemos un entero positivo N y sea B un producto de Blaschke finito que se anula en $a_1, a_2, \dots, a_N$. La función f/B es holomorfa y acotada en módulo por 1. En particular,

$$|f(0)| \le |B(0)| = \prod_{j=1}^{N}|a_n|\,.$$

Como esto es cierto para todo N, concluimos que $\prod_{j=1}^{\infty}|a_n|>0$ y, por tanto, que $\sum_{j=1}^{\infty}\ln(1/|a_n|)<+\infty$. De nuevo, usando que $1-x\le\ln(1/x)$, se deduce que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|) < +\infty\,.$$

♠

De un subconjunto A de $\mathbb{D}$ se dice que cumple la **condición de Blaschke** si $\sum_{a\in A}(1-|a|)<+\infty$. Un tal conjunto A que cumple la condición de Blaschke no sólo es discreto si no que si es infinito entonces ha de acumularse en $\partial\mathbb{D}$ con suficiente velocidad.[7]

El teorema 8.6 afirma entonces que el conjunto de ceros de una función holomorfa acotada cumple la condición de Blaschke.

[7] Allegro ma non troppo, un poco maestoso.

8.2.1. Productos infinitos de Blaschke y teorema de Blaschke

El teorema de Weierstrass para dominios generales, teorema 7.36, nos dice que si A es un subconjunto discreto cualquiera del disco unidad $\mathbb{D}$, entonces existe una función holomorfa f en $\mathbb{D}$ tal que $\mathcal{Z}_f = A$, es decir, que tiene al conjunto A como su conjunto de ceros.

En contraposición, el teorema 8.6 nos dice que si exigiéramos adicionalmente que la función f fuera acotada, entonces el conjunto A no es arbitrario, no, pues ha de cumplir la condición de Blaschke. Pero, como vamos a ver seguidamente, que un conjunto A cumpla la condición de Blaschke es suficiente para garantizar la existencia de f holomorfa y acotada en $\mathbb{D}$ tal que $\mathcal{Z}_f = A$.

Vamos con ello. Supongamos que A es un conjunto discreto en $\mathbb{D}$ tal que $\sum_{a\in A}(1-|a|) < +\infty$. Pretendemos construir[8] una función f holomorfa en $\mathbb{D}$ y acotada que se anule (exactamente) en los puntos de A.

Si A fuera un conjunto finito $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, podríamos tomar como f al polinomio $P(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j)$, que, por supuesto, está acotado en $\mathbb{D}$. Pero es mejor usar como f al producto de Blaschke finito

$$B(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - z\overline{a_j}}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

La razón de por qué es mejor usar B que P como f para nuestros propósitos es porque se tiene que $|B(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, independientemente de quiénes sean los a_n.

Supongamos ahora que A es un conjunto infinito, pongamos $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. La idea es formar un producto infinito con factores $(z - a_j)/(1 - z\overline{a_j})$. Pero un tal producto, en general, no converge, pues, por ejemplo, en $z = 0$ valdría $\prod_{j=1}^{\infty}(-a_j)$, que como no tenemos control sobre los argumentos de los a_n, podría no converger. Véase la nota 8.2.3.

Para cada $a \in \mathbb{D}$, definimos h_a como la función holomorfa en $\mathbb{D}$ dada por

$$h_a(z) = \frac{-|a|}{a} \frac{z - a}{1 - z\overline{a}}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Cuando $a = 0$, entendemos que h_a es la función identidad, es decir, $h_a(z) = z$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Observe, lector, que $h_a(0) = |a|$ y que $h_a(a) = 0$, para todo $a \in \mathbb{D}$. Además, claro, $|h_a(z)| \le 1$, para todo $z \in \mathbb{D}$ y todo $a \in \mathbb{D}$.

Lema 8.7 *Para cada $a \in \mathbb{D}$ y cada $z \in \mathbb{D}$ se tiene que*

$$\big|1 - h_a(z)\big| \le \frac{1 + |z|}{1 - |z|}(1 - |a|)\,.$$

[8] Es un decir.

demostración. Para $a=0$, la conclusión es obvia. Pongamos que $a\neq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}|1-h_a(z)|&=\Big|1+\frac{|a|}{a}\frac{z-a}{1-z\overline{a}}\Big|=\Big|\frac{a(1-|a|)+|a|z(1-|a|)}{a\,(1-z\overline{a})}\Big|\\&\le\frac{|a|(1+|z|)(1-|a|)}{|a||1-z\overline{a}|}\le\frac{1+|z|}{1-|z|}(1-|a|)\,,\end{aligned}$$

como queríamos ver.

Podemos dar una demostración más geométrica de este lema 8.7, que explica un poco más el porqué de los factores h_a.

Fijemos $r\in(0,1)$. La transformación de Möbius $h_a(z)$ lleva el diámetro de $\mathbb{D}$ que pasa por $a/|a|$ y $-a/|a|$ sobre el diámetro de $\mathbb{D}$ que pasa por -1 y 1, pues $h_a(a/|a|)=-1$, $h_a(-a/|a|)=1$ y $h_a(a)=0$. Además $h_a(0)=|a|$. De hecho, $h_a(z)$ es la composición de un giro alrededor de $z=0$ seguido de la transformación $(z+|a|)(1-z|a|)$ que deja fijos -1 y 1 y lleva 0 en $|a|$ y que en cierto sentido «empuja» hacia el punto 1.

Como las transformaciones de Möbius conservan ángulos y llevan cículos/rectas sobre círculos/rectas, la transformación $h_a(z)$ ha de llevar el disco $\mathbb{D}(0,r)$ en el disco perpendicular al eje real que pasa por los puntos $h_a(ra/|a|)$ y $h_a(-ra/|a|)$. El punto más alejado de 1 de ese disco imagen es justamente

$$h_a(ra/|a|)=\frac{|a|-r}{1-r|a|}\,.$$

Por consiguiente,

$$\sup_{|z|\le r}\big|1-h_a(z)\big|=\big|1-h_a(ra/|a|)\big|=1-\frac{|a|-r}{1-r|a|}=\frac{(1-|a|)(1+r)}{1-r|a|}\le\frac{(1-|a|)(1+r)}{1-r}\,.$$

■

Formemos ahora el producto infinito B de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$

$$(\sharp)\qquad B(z)\triangleq\prod_{n=1}^{\infty}h_{a_j}(z)\,,\quad\text{para todo } z\in\mathbb{D}\,.$$

Note, lector, que *ahora* $\prod_{n=1}^{\infty}h_{a_j}(0)=\prod_{n=1}^{\infty}|a_j|$, que sí converge si $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)<+\infty$.

El lema 8.7 y el criterio M de Weierstrass para productos infinitos, teorema 7.13, se combinan ahora para justificar que el producto B converge absolutamente y uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$ hacia una función holomorfa en $\mathbb{D}$ que se anula exactamente en los a_n. Además, como $|h_a(z)|<1$ para cada $a\in\mathbb{D}$ y $z\in\mathbb{D}$, se tiene que $|B(z)|<1$, para cada $z\in\mathbb{D}$.

A esta función $B(z)$ se le conoce como **producto (infinito) de Blaschke** con ceros $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Con todo esto hemos probado que

Teorema 8.8 (Teorema de Blaschke) *Sea A un conjunto discreto en $\mathbb{D}$. Entonces existe una función holomorfa en $\mathbb{D}$ y acotada que se anula exactamente sobre A si y sólo si A cumple la condición de Blaschke:*

$$\sum_{a\in A}(1-|a|)<+\infty\,.$$

☞ **Nota** 8.2.3. ☜ Como coda de la construcción de los productos de Blaschke infinitos, considérese la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, dada por

$$a_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n\,(n+2)}{(n+1)^2}\,,\quad \text{para } n\geq 1\,,$$

que cumple la condición de Blashcke. El siguiente producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z-a_n}{1-z\overline{a_n}}\,,$$

no converge en $z=0$, pues

$$\prod_{n=1}^{k}(-a_n)=(-1)^k\frac{1}{2}\frac{k+2}{k+1}\,.$$

Observe lector que en este producto no aparecen, como es menester en un producto de Blaschke, los convenientes factores $-|a_n|/a_n$.

Por cierto, si incorporáramos esos factores $-|a_n|/a_n$, que en este caso son todos iguales a -1, el producto infinito sería

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-z}{1-z\overline{a_n}}\,,$$

que sí converge en todo $z\in\mathbb{D}$, y que en $z=0$, por ejemplo, vale $1/4$. ♠

8.3. Funciones enteras: orden y exponente de convergencia

En este apartado discutimos dos conceptos centrales para el estudio de las *funciones enteras*: orden de crecimiento y exponente de convergencia de sus ceros.

El orden de crecimiento nos da una escala para medir cuán rápidamente crece la función entera cuando z tiende a $\infty_{\mathbb{C}}$; mientras que el exponente de convergencia es una escala para medir cuán rápidamente los ceros de la función entera se van hacia infinito.

La fórmula de Jensen, teorema 8.1, permitirá relacionar en un plisplás (teorema 8.12) estas dos escalas: el orden tiene que ver con el lado derecho de la fórmula de Jensen, mientras que el exponente de convergencia tiene que ver con el lado izquierdo.

8.3.1. Orden de una función entera

Sea f una función entera.

Definición 8.1 *El* ***orden*** *u* ***orden de crecimiento*** *de f, que denotamos por $\rho(f)$ se define como el ínfimo de los $t \geq 0$ para los que existe una constante $C_t > 0$ tal que*

$$|f(z)| \leq C_t \, e^{|z|^t}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Si no hay ningún tal valor $t \geq 0$ entonces se dice que el orden de f es ∞.

Observe, lector, que

- si $t > \rho(f)$, entonces la función $z \mapsto |f(z)| \, e^{-|z|^t}$ está acotada en todo $\mathbb{C}$,
- si $t < \rho(f)$, entonces la función $z \mapsto |f(z)| \, e^{-|z|^t}$ no está acotada.

En $t = \rho(f)$ puede ocurrir que $z \mapsto |f(z)| \, e^{-|z|^t}$ esté acotada en todo $\mathbb{C}$ o no.

Podemos expresar el orden de f algo más compacta y elegantemente como sigue. Definamos para cada $r \geq 0$:

$$M(f, r) = \max\{|f(z)|; |z| \leq r\}.$$

Así que $M(f, r)$ es el módulo máximo de f en el disco $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(0, r))$. La función $r \mapsto M(f, r)$ es una función no decreciente. Una expresión alternativa para el orden $\rho(f)$ es

$$\boxed{\rho(f) = \limsup_{r \to \infty} \frac{\ln\big(\ln M(f, r)\big)}{\ln(r)}}$$

Siguen, lector, unas cuantas observaciones sobre el orden de funciones enteras de comprobación directa y que usaremos con frecuencia.

- si la función entera f tiene orden $\rho(f)$, entonces la función entera $f(z^k)$ tiene orden $k\rho(f)$,

- si f, g son funciones enteras entonces
$$\rho(f+g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\} \qquad \text{y} \qquad \rho(f \cdot g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}\,.$$
- si f es una función entera y P es un polinomio, entonces
$$\rho(P \cdot f) = \rho(f)\,.$$

EJEMPLO 8.3.1 *Orden de algunas funciones enteras.*

- La exponencial e^z tiene orden 1. Para cada entero $k \geq 1$, la función e^{z^k} tiene orden k. La exponencial hace el papel de unidad de medida (del orden), y las e^{z^k} nos dan toda una escala.
- Todos los polinomios tienen orden 0. De hecho, una función entera es un polinomio si y sólo si
$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln(M(f,r))}{\ln(r)} < +\infty\,.$$
Observe, lector, que en la expresión anterior hay un sólo ln en el numerador.
- Las funciones $f(z) = e^z$ y $g(z) = ze^z$ tiene ambas orden 1. Para $f(z)$ se tiene que $z \mapsto |f(z)|\,e^{-|z|}$ está acotada en todo $\mathbb{C}$. Mientras que para $g(z)$ se tiene que $z \mapsto |g(z)|\,e^{-|z|}$ no está acotada en todo $\mathbb{C}$.
- Las funciones circulares sen y cos y las funciones hiperbólicas senh y cosh tienen todas orden 1. Observe, lector, por ejemplo, que
$$M(\cosh, r) = M(\cos, r) = \cosh(r)\,, \quad \text{para todo } r \geq 0\,.$$
- Si Q es un polinomio de grado (exactamente) $k \geq 0$, la función $e^{Q(z)}$ tiene orden k.
- La función entera e^{e^z} tiene orden infinito.
- La función coseno es una función par: es función de z^2 y la podemos escribir en la forma
$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} = g(z^2)\,,$$
donde g es la función entera
$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^n\,.$$
Podemos escribir sin ambigüedad que $g(z) = \cos\sqrt{z}$, para cada $z \in \mathbb{C}$.

  Obsérvese que
$$M(g, r) = M(\cos, \sqrt{r}) = \frac{e^{\sqrt{r}} + e^{-\sqrt{r}}}{2}\,, \quad \text{para cada } r \geq 0\,,$$
así que g tiene orden $1/2$.

  Para cada entero $k \geq 1$, la función $g(z^k)$ tiene orden $k/2$.

- Análogamente, para entero $q \geq 1$, la función

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(qn)!} z^n \,,$$

tiene orden $1/q$. Si $p \geq 1$ es entero y $s = p/q$, entonces la función $g(z^p)$ tiene orden s. Esto nos da ejemplos de funciones enteras con orden racional.

☞ **Nota** 8.3.1. ☜ Un poco más de detalle: Fijemos un entero $q \geq 1$. Sea $f(z)$ la función exponencial: $f(z) = e^z$.

Sea $h(z)$ la función entera dada por

$$h(z) = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} f(e^{2\pi \imath j/q}\, z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

La función $h(z)$ tiene desarrollo en serie de potencias de z dado por

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(qn)!} z^{qn}\,.$$

La función $h(z)$ tiene orden: $\rho(h) = 1$. Veamos. Como $f(z)$ tiene orden 1, se sigue que $\rho(h) \leq 1$. Por otro lado, para $r > 0$ se tiene que

$$h(r) \geq \frac{1}{q}\Big(f(r) - \sum_{j=1}^{q-1} |f(re^{2\pi \imath j/q})|\Big) \geq \frac{1}{q}\Big(e^r - (q-1)e^{r\cos(2\pi/q)}\Big)\,,$$

de manera que $\liminf_{r\uparrow\infty} h(r)e^{-r} \geq 1$, y, por consiguiente, $\rho(h) \geq 1$.

De hecho, lector, $\lim_{r\uparrow\infty} h(r)e^{-r} = 1/q$.

Finalmente, la función entera $g(z)$ dada por $g(z^q) = h(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$, tiene orden $1/q$ y desarrollo en serie de potencias:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(qn)!} z^n\,, \quad \text{para } z \in \mathbb{C}.$$

♠

- Como comprobaremos, más adelante en el ejemplo 8.4.1 la función entera $1/\Gamma(z)$ tiene orden de crecimiento 1. ♣

EJEMPLO 8.3.2 *La derivada $f'(z)$ de una función entera $f(z)$ tiene el mismo orden que $f(z)$.*

Sea $r > 0$ y $|z| = r$. De la fórmula integral de Cauchy

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{|w|=2r} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw\,,$$

se deduce que
$$|f'(z)| \leq \frac{2}{r} M(f, 2r)\,,$$
de donde
$$M(f', r) \leq \frac{2}{r} M(f, 2r)\,,$$
y, por consiguiente que
$$\rho(f') \leq \rho(f)\,.$$

Para $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = r$, se tiene que
$$f(z) = f(0) + \int_0^z f'(w)\,dw\,.$$
Por tanto,
$$|f(z)| \leq |f(0)| + rM(f'(r)\,,$$
de manera que,
$$M(f, R) \leq |f(0)| + rM(f', r)\,,$$
y, por consiguiente, que
$$\rho(f) \leq \rho(f')\,.$$

♣

Ejemplo 8.3.3 *Para $\delta > 0$, la función entera f_δ dada por la serie de potencias*
$$f_\delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\delta n}}\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}\,,$$
tiene orden $\rho(f_\delta) = 1/\delta$. Asimismo, la función entera g_δ dada por la serie de potencias
$$g_\delta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^\delta}\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}\,,$$
tiene orden $\rho(g_\delta) = 1/\delta$.

Cualquier número real positivo es pues el orden de alguna función entera. Nótese que g_1 es, de hecho, la función exponencial.

El ejemplo 8.3.3 es la clave para la verificación de la fórmula del orden de una función entera en términos de sus coeficientes de Taylor que veremos en el teorema 8.9; de hecho, que el orden de f_δ y el de g_δ es $1/\delta$ se sigue directamente de ese teorema, pero, en realidad, usaremos que $\rho(f_\delta) = 1/\delta$ en su verificación.

A continuación vamos a discutir sólo el orden de f_δ. El orden de g_δ se obtendría con un argumento análogo o, simplemente, apelando al teorema 8.9.

Como los coeficientes de Taylor de f_δ son positivos, $M(f_\delta, r) = f_\delta(r)$, para todo $r \geq 0$.

Para $r>0$ y δ fijos, la función h dada por

$$x \geq 0 \mapsto h(x) = \exp(x\ln(r) - \delta x \ln(x)) = \frac{r^x}{x^{\delta\, x}}\,,$$

- tiene máximo en $x = u \triangleq \frac{1}{e}\, r^{1/\delta}$ donde alcanza el valor $U(r,\delta) \triangleq e^{(\delta/e) r^{1/\delta}}$,
- crece desde $x=0$ (donde vale $h(0)=1$) hasta $x=u$,
- decrece desde $x=u$ hasta $x=+\infty$.

Por tanto,

$$\frac{r^n}{n^{\delta n}} \leq U(r,\delta)\,, \quad \text{para } n \geq 1\,.$$

Además, para $n \geq (2r)^{1/\delta}$ se cumple que

$$(\natural) \quad \frac{r^n}{n^{\delta n}} \leq \frac{r^n}{2^n r^n} = \frac{1}{2^n}\,,$$

Acotamos seguida y convenientemente $f_\delta(r) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n/n^{\delta n}$. Separamos la serie en la parte en que $n < (2r)^{1/\delta}$, que acotamos por el producto del número de sumandos multiplicado por el tamaño máximo $U(r,\delta)$ de los sumandos, y el resto de la serie, que acotamos usando $(\natural)$:

$$f_\delta(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n^{\delta n}} = \sum_{1 \leq n < (2r)^{1/\delta}} \frac{r^n}{n^{\delta n}} + \sum_{n \geq (2r)^{1/\delta}} \frac{r^n}{n^{\delta n}} \leq\ (2r)^{1/\delta} e^{(\delta/e) r^{1/\delta}} + 1\,.$$

Para $r \geq 1$, tenemos, por tanto, que

$$f_\delta(r) \leq A_\delta\, r^{1/\delta} e^{B_\delta r^{1/\delta}}\,,$$

donde A_δ y B_δ son ciertas constantes positivas que dependen sólo de δ.

Buscamos ahora una acotación inferior de $f_\delta(r)$.

Para r y δ fijos, como la función $h(x)$ es creciente desde $x=0$ hasta $x=u$, para n en el rango

$$\frac{1}{2e}\, r^{1/\delta} = \frac{u}{2} \leq n \leq u = \frac{1}{e}\, r^{1/\delta}\,,$$

se tiene que

$$h(r) = \frac{r^n}{n^{\delta n}} \geq h\big(\frac{u}{2}\big) = \exp\Big(\delta \frac{\ln(2e)}{2e} r^{1/\delta}\Big)\,.$$

Con esto, si restringimos la suma de la serie que da $f_\delta(r)$ a ese rango de valores de n, obtenemos que

$$f_\delta(r) \geq \sum^{\star} \frac{r^n}{n^{\delta n}} \geq \frac{1}{2e}\, r^{1/\delta} \exp\Big(\delta \frac{\ln(2e)}{2e} r^{1/\delta}\Big)\,,$$

donde $\sum^{\star}$ significa que la suma está restringida a los valores de n tales que $r^{1/\delta}/(2e) \leq n \leq r^{1/\delta}/e$.

En suma, para $r \geq 1$ y para $\delta > 0$ tenemos,

$$\alpha_\delta\, r^{1/\delta} e^{\beta_\delta\, r^{1/\delta}} \leq f_\delta(r) \leq A_\delta\, r^{1/\delta} e^{B_\delta\, r^{1/\delta}}$$

donde $\alpha_\delta, \beta_\delta, A_\delta, B_\delta$ son constantes positivas que dependen tan sólo de δ.

En particular, para cualquier $\delta > 0$,

$$\rho(f_\delta) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\big(\ln M(f_\delta, r)\big)}{\ln(r)} = \frac{1}{\delta}\,.$$

♣

8.3.2. Orden y coeficientes de Taylor

Como ya habíamos adelantado, y como vamos a verificar seguidamente, se puede expresar el orden de una función entera f en términos de los coeficientes de su desarrollo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en serie de potencias de z, válido en todo $\mathbb{C}$. Observe, lector, que por ser f entera, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ ó, equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1/|a_n|)}{n} = +\infty\,.$$

Pues bien,

Teorema 8.9 (Hadamard) *Sea f una función entera cuyo desarrollo de Taylor alrededor de $z = 0$ es*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Entonces

$$\boxed{\frac{1}{\rho(f)} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\ln(1/|a_n|)}{n\ln(n)}}$$

Veamos algunas ilustraciones del uso del teorema 8.9.

- El teorema 8.9 nos da directamente que para cualquier $\delta > 0$, las funciones f_δ, g_δ del ejemplo 8.3.3 tienen orden $1/\delta$.
- La fórmula del teorema 8.9 sólo depende del módulo de los coeficientes, de manera que dada la función entera $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, si ponemos $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n$, entonces $\rho(f) = \rho(F)$.
- Se sigue del teorema 8.9 que la derivada $f'(z)$ de una función entera $f(z)$ tiene el mismo orden que f, es decir, $\rho(f') = \rho(f)$.

- Apelando a la fórmula de Stirling, se observa que la función $\operatorname{sen}(z)$ tiene orden 1. Asimismo, la función $\operatorname{sen}(z)/z$ tiene orden 1. Además, para cada entero $p \geq 1$, la función $\operatorname{sen}(z^p)/z^p$ tiene orden p.

demostración. Denotemos

$$\mu = \liminf_{n\to\infty} \frac{\ln(1/|a_n|)}{n\ln(n)}\,.$$

• Vamos a comprobar primero que $\rho(f) \leq 1/\mu$, incluso cuando $\mu = +\infty$.

Si $\mu = 0$, no hay nada que probar. Supongamos entonces que $0 < \mu \leq +\infty$. Para cualquier η, $0 < \eta < \mu$, existe $N = N_\eta$ tal que

$$\frac{\ln(1/|a_n|)}{n\ln(n)} \geq \eta\,, \quad \text{para todo } n > N\,,$$

es decir,

$$|a_n| \leq \frac{1}{n^{\eta n}}\,, \quad \text{para todo } n > N\,.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n &= \sum_{n=0}^{N} |a_n||z|^n + \sum_{n>N} |a_n||z|^n \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n||z|^n + \sum_{n>N} \frac{1}{n^{\eta n}}|z|^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{N} |a_n||z|^n + f_\eta(|z|)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$M(f,r) \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n|\,r^n + M(f_\eta, r)\,, \quad \text{para todo } r \geq 0\,,$$

y, por tanto,

$$\rho(f) \leq \rho(f_\eta) = \frac{1}{\eta}\,.$$

Como esta desigualdad es válida para todo $\eta < \mu$, concluimos, incluso si $\mu = +\infty$, que

$$\rho(f) \leq \frac{1}{\mu}\,.$$

• Pasamos ahora a verificar que $\rho(f) \geq 1/\mu$. Ahora podemos suponer que $0 \leq \mu < +\infty$.

Sea $\eta > \mu$. Para un subconjunto infinito $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ se tiene que

$$|a_n| > \frac{1}{n^{\eta n}}\,, \quad \text{para todo } n \in \mathcal{N}\,.$$

Por la desigualdad integral de Cauchy se tiene que

$$|a_n|r^n \leq M(f,r)\,, \quad \text{para todo entero } n \geq 0 \text{ y todo } r \geq 0\,,$$

y, por tanto,

$$\frac{r^n}{n^{\eta n}} \leq M(f,r)\,, \quad \text{para todo } n \in \mathcal{N} \text{ y todo } r \geq 0\,.$$

Fijemos $n \in \mathcal{N}$. Optimicemos la desigualdad anterior escogiendo $r = r_n = (en)^\eta$, para obtener que

$$e^{\eta n} \leq M(f, r_n)\,, \quad \text{para todo } n \in \mathcal{N}\,.$$

Como $\ln(r_n) = \eta\,(1 + \ln(n))$ se tiene que

$$\frac{\ln(n) + \ln(\eta)}{\eta\,(1 + \ln(n))} \leq \frac{\ln(\ln(M(f, r_n))}{\ln(r_n)}\,, \quad \text{para todo } n \in \mathcal{N}\,,$$

y, por tanto, que

$$\frac{1}{\eta} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln(\ln(M(f, r_n))}{\ln(r_n)} \leq \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln(\ln(M(f, r))}{\ln(r)} = \rho(f)\,.$$

Finalmente, como esto es cierto para todo $\eta > \mu$, se concluye que

$$\frac{1}{\mu} \leq \frac{1}{\rho(f)}\,,$$

incluso si $\mu = 0$. ■

8.3.3. Orden de una exponencial

Sea $g(z)$ una función entera y consideremos la función $f(z)$, asimismo entera, que se obtiene al exponenciar $g(z)$, es decir, $f(z) = e^{g(z)}$. Nos interesa aquí el orden de la función $f(z)$. Pues bien:

Proposición 8.10 *Si $g(z)$ es una función entera, la función entera $f(z) = e^{g(z)}$ tiene orden finito si y sólo si $g(z)$ es un polinomio. En ese caso $\rho(f) = grado(g)$.*

Como corolario, las funciones enteras que no se anulan sólo pueden tener orden entero u orden infinito. ¡Vaya, vaya! Por tanto, las funciones enteras de orden no entero tienen que anularse. De hecho, como consecuencia del teorema 8.16 de factorización de Hadamard, tales funciones han de anularse infinitas veces.

Ya hemos comentado que si $g(z)$ es polinomio de orden k entonces $f(z)$ tiene orden k.

La idea del argumento en la dirección contraria parte de observar primero que $|f(z)| = \exp\big(\Re g(z)\big)$, para todo $z \in \mathbb{C}$, trasladar luego la acotación sobre $|f(z)|$ que nos da el orden finito de $f(z)$ en estimación sobre el crecimiento de la parte real de g, para, finalmente, apelar al lema 4.24 de Borel-Carathéodory y deducir una acotación de la propia $g(z)$ que nos dará que $g(z)$ es un polinomio.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $g(0) = 0$.

Si $t > \rho(f)$, tenemos para cierta constante $C_t > 0$ que $|f(z)| \leq C_t \exp(|z|^t)$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Por tanto,

$$\Re g(z) \leq \ln C_t + |z|^t \ \leq A_t(1 + |z|^t)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

con $A_t = \text{máx}\{\ln C_t, 1\}$.

El lema 4.24 de Borel-Carathéodory (usando que $g(0) = 0$) nos da entonces que

$$|g(z)| \leq 2A_t\big(1 + 2^t|z|^t\big)\,.$$

La desigualdad integral de Cauchy para las derivadas de g implica entonces que g es un polinomio con grado a lo sumo t. ■

8.3.4. Exponente de convergencia de ceros de una función entera

Planteamos primero este concepto de exponente de convergencia para sucesiones generales, para, luego, particularizarlo al caso de sucesiones de ceros de funciones enteras.

Sea $(z_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números complejos tal que ninguno de sus términos es nulo y tal que converge a $\infty_{\mathbb{C}}$, es decir, $z_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$ y $\text{lím}_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$.

Definimos el **exponente de convergencia** σ de la sucesión $(z_n)_{n\geq 1}$ como

$$\sigma = \text{ínf}\left\{s \geq 0; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^s} < +\infty\right\},$$

con la convención de que si para ningún exponente $s \geq 0$ se tiene la sumabilidad requerida entonces declaramos, abiertamente y sin vergüenza, $\sigma = +\infty$.

Obsérvese que cuanto más rápidamente sea la convergencia de $|z_n|$ hacia $+\infty$ menor será el exponente σ de convergencia. El exponente de convergencia de una sucesión es en realidad una medida de cuán rápidamente esta sucesión tiende a $\infty_{\mathbb{C}}$.

EJEMPLO 8.3.4 *Algunos ejemplos de exponentes de convergencia de sucesiones.*

- Para $z_n = n$, $n \geq 1$, se tiene $\sigma = 1$. Obsérvese que en el exponente $\sigma = 1$ se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = +\infty$.
- Para $z_n = n\ln^2(1+n)$, $n \geq 1$, se tiene $\sigma = 1$, pero ahora en el exponente $\sigma = 1$ se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(n\ln^2(1+n)) < +\infty$.
- Para $z_n = n^\delta$, $n \geq 1$, con $\delta > 0$, se tiene que $\sigma = 1/\delta$.
- Para $z_n = 2^n, n \geq 1$, se tiene que $\sigma = 0$.

- Para una sucesión con un número finito de términos, se tiene, claro, que $\sigma = 0$.
- Para $z_n = \ln(1+n), n \geq 1$ se tiene que $\sigma = +\infty$. ♣

Sea μ la medida (de Borel) en $[0,+\infty)$ dada por $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{|z_n|}$ y sea N la función (de distribución asociada) $N(t) = \mu([0,t])$ para $t \geq 0$. A N se la denomina **función contadora** de los z_n o **contador** de los z_n. Nótese que $N(\varepsilon) = 0$ para un cierto $\varepsilon > 0$, pues los z_n no se acercan a 0. Podemos expresar la suma de la serie de los $|z_n|^{-s}$ como integral respecto de la medida μ y ésta, a su vez, como una integral de la función N:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^s} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^s} d\mu(x) = \int_0^{+\infty} \mu\Big(\frac{1}{x^s} > t\Big) dt \\ &= \int_0^{+\infty} N(t^{-1/s}) dt = s \int_0^{+\infty} N(y) \frac{dy}{y^{s+1}}\end{aligned}$$

☞ **Nota** 8.3.2. ☜ Hemos usado que si μ es una medida en un espacio Ω, y si G es una función integrable no negativa, entonces

$$\int_\Omega G(\omega) d\mu(\omega) = \int_0^{\infty} \mu(G > t) dt$$

♠

Con algo más de generalidad, y para posterior uso y ulterior referencia, registramos:

Lema 8.11 *Con las notaciones anteriores, para todo $s > 0$ y para todo $r \geq 0$ se cumple que*

$$\sum_{|z_n| \geq r} \frac{1}{|z_n|^s} + \frac{N(r)}{r^s} = s \int_r^{+\infty} N(t) \frac{dt}{t^{s+1}}\,, \quad \textit{para todo } r \geq 0\,.$$

En particular,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^s} = s \int_0^{+\infty} N(t) \frac{dt}{t^{s+1}}\,.$$

Por tanto, el exponente de convergencia de la sucesión $(z_n)_{n\geq 1}$ viene asimismo dado por

$$(\star_1) \qquad \sigma = \text{ínf}\left\{ s \geq 0; \int_0^{+\infty} N(t) \frac{dt}{t^{s+1}} \right\}.$$

Esta identidad del lema 8.11 nos permite expresar además el exponente σ de la sucesión $(z_n)_{n\geq 1}$ como

$$(\star_2) \qquad \sigma = \text{ínf}\{ s \geq 0;\, N(t) = O(t^s)\}\,,$$

donde, por supuesto, la constante de la O grande en la acotación $N(t) = O(t^s)$ depende, en general, de s. Veamos. Si

$$I_s \triangleq s\int_0^{+\infty} N(y)\frac{dy}{y^{s+1}} < +\infty\,,$$

entonces como la función N es no decreciente tenemos para todo t que

$$\frac{N(t)}{t^s} \le s\int_t^{+\infty} N(y)\frac{dy}{y^{s+1}} \le I_s\,, \quad \text{para todo } t > 0\,.$$

Por otro lado, si $N(t) < C_s t^s$ para todo $t > 0$, entonces

$$\int_0^{+\infty} N(y)\frac{dy}{y^{u+1}} < +\infty\,, \quad \text{para todo } u > s\,.$$

puesto que $N(y) = 0$ para $y \le y_0$ ya que los z_n no se acercan a 0.

Alternativamente, podemos expresar el exponente de convergencia de la sucesión en la compacta forma siguiente:

$$(\star_3) \qquad \sigma = \limsup_{t\to+\infty} \frac{\ln(N(t))}{\ln(t)}\,.$$

☞ **Nota** 8.3.3. ☜ Podemos obtener la fórmula $(\star)$ sin apelar al lema 8.11 como sigue.

Numeremos los ceros $0 < |a_1| \le |a_2| \le \ldots$. Si $N(t) \le Ct^\delta$, para $t \ge t_0$, poniendo $t = |a_n|$ y $n \ge n_0$, se tiene que $n \le C|a_n|^\delta$, de forma que $1/|a_n| \le C^{1/\delta}/n^{1/\delta}$ para $n \ge n_0$ y $\sigma \le \delta$.

Recíprocamente, supongamos que $N(t_j) \ge Ct_j^\delta$ para una sucesión $t_j \uparrow \infty$. Para j suficientemente grande tomamos n tal que $1 \le |a_n| \le t_j < |a_{n+1}|$, entonces $N(t_j) = n$, y $n \ge Ct_j^\delta \ge C|a_n|^\delta$. Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{\delta(1-\epsilon)}} \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|a_k|^{\delta(1-\epsilon)}} \ge C^{1-\epsilon}\frac{n}{n^{1-\epsilon}} = C^{1-\epsilon}n^\epsilon\,.$$

Por tanto, $\sigma \ge \delta(1-\epsilon)$. ♠

Para una función entera f, llamamos **exponente de convergencia de** f, o **exponente de convergencia de los ceros de** f, y lo denotamos por $\sigma(f)$, al exponente de convergencia de la sucesión de ceros *no nulos* de f.

Nótese que si la función entera f se anula en $z = 0$ y si escribimos $f(z) = z^k\, g(z)$, para un entero $k \ge 1$ donde g es entera y $g(0) \ne 0$, entonces

$$\sigma(f) = \sigma(g)\,.$$

EJEMPLO 8.3.5 *Algunos ejemplos de exponentes de convergencia de funciones enteras.*

- Para las funciones circulares sen, cos y para las funciones hiperbólicas senh y cosh, el exponente de convergencia es 1.

- Para cualquier función entera que no se anula, o que se anula en un número finito de puntos, el exponente de convergencia es 0.
- Para la función entera $1/\Gamma(z)$ el exponente de convergencia es 1.
- La función entera $\operatorname{sen}(\pi z^k)$, se anula si $z^k = j$ para algún entero j, así que

$$N(t) = 1 + 2 \sum_{1 \le j \le t^k} k = 1 + 2k\lfloor t^k \rfloor\,,$$

  y, por consiguiente, su exponente de convergencia es $\sigma = k$.
- La función entera $\operatorname{sen}(\pi e^z)$ se anula, en particular, en los puntos $\ln(k), k \ge 2$, así que $N(t) \ge \lfloor e^t \rfloor - 1$, para $t \ge 0$. El exponente de convergencia es, por tanto, $\sigma = +\infty$.
- Para $\cos(\sqrt{z})$, el exponente de convergencia es $1/2$. ♣

8.3.5. Relación entre orden y exponente de convergencia

Como habíamos anunciado, y publicitado insistentemente, hay una relación general entre el orden de crecimiento y el exponente de convergencia de una función entera.

Teorema 8.12 *Para cualquier función entera f se tiene que*

$$\sigma(f) \le \rho(f)\,.$$

Es decir, el exponente de convergencia de los ceros no excede al orden de crecimiento.

Al multiplicar una función f entera dada por una función g entera que no se anula, el conjunto de ceros permanece inalterado, pero no así el orden, en general. Así que en la generalidad con la que se ha enunciado el teorema 8.12 no se tiene igualdad en el teorema anterior: por ejemplo, la exponencial tiene $\sigma = 0$ y $\rho = 1$, más aún, para k entero positivo $\sigma(\exp(z^k)) = 0$, pero $\rho(\exp(z^k)) = k$, o, por último, e^{e^z} tiene orden de crecimiento infinito, pero exponente de convergencia 0.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que la función f no se anula en $z = 0$ y, por pura comodidad notacional, que $f(0) = 1$. La fórmula de Jensen, teorema 8.1, aplicada a f en el círculo de radio $r > 0$, nos da

$$\int_0^r \frac{N(s)}{s}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln(|f(re^{\imath\vartheta})|\,d\vartheta\,,$$

donde N es el contador de ceros de f.

Si restringimos la integral de la izquierda a $\int_{r/2}^r$, usamos que N es no decreciente y en la derecha acotamos $|f(re^{\imath\vartheta})|$ por $M(f,r)$, obtenemos que

$$N(r/2)\,\ln(2) \le \ln M(f,r)\,, \quad \text{para todo } r \ge 0$$

y, por tanto, que

$$\frac{\ln\big(N(r/2)\big)+\ln(\ln(2))}{\ln(r/2)+\ln(2)}\le\frac{\ln\big(\ln(M(f,r)\big)}{\ln(r)}\,,\quad \text{para todo } r\ge 0\,,$$

de donde, tomando lím sup cuando $r\to\infty$ se concluye que $\sigma(f)\le\rho(f)$. ■

Ejemplo 8.3.6 *Sea $(z_n)_{n\ge1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ ninguno de cuyos elementos es 0 y tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z_n|}<+\infty$$

Sea f la función entera dada por el producto infinito

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{z}{z_n}\Big)\,,\quad \textit{para todo } z\in\mathbb{C}\,.$$

Pues bien, el orden de f coincide con el exponente de convergencia de los z_n.

Como bien sabemos, consulte lector el apartado 7.3, como $S\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}(1/|a_n|)<+\infty$, la función f es efectivamente entera y se anula exactamente en los z_n. Además como, por hipótesis, $S<+\infty$, el exponente $\sigma(f)$ es ≤ 1.

Queremos ver que $\sigma(f)=\rho(f)$. Ya sabemos que $\sigma(f)\le\rho(f)$, puesto que esto es cierto para cualquier función entera, teorema 8.12. Así que queremos verificar que $\rho(f)\le\sigma(f)$.

Para acotar $|f(z)|$ podemos escribir, usando que $1+y\le e^y$, para $y\ge0$, que

$$|f(z)|\le\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{|z|}{|z_n|}\Big)\le\exp\Big(|z|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{|z_n|}\Big)=e^{S|z|}\,,\quad \text{para todo } z\in\mathbb{C}\,.$$

Esto nos dice que el orden $\rho(f)$ de f es a lo sumo 1. Por tanto, si fuera $\sigma(f)=1$ no habría nada más que probar, pues tendríamos $\rho(f)\le1=\sigma(f)$; así que supondremos en lo que sigue (de la discusión de este ejemplo) que $\sigma(f)<1$.

En la acotación anterior hemos usado la desigualdad $(1+y)\le e^y$, que es válida para todo $y\ge0$ (de hecho, para todo $y\in\mathbb{R}$), pero para y moderadamente grande es una estimación excesivamente generosa.

Fijemos z. Acotamos el producto de aquellos n tales que $|z_n|>|z|$, con

$$\prod_{|z_n|>|z|}\Big(1+\frac{|z|}{|z_n|}\Big)\le\exp\Big(|z|\sum_{|z_n|>|z|}\frac{1}{|z_n|}\Big)\le\exp\Big(|z|\int_{|z|}^{+\infty}N(t)\frac{dt}{t^2}\Big),$$

donde N es el contador de los z_n. Para τ tal que $\sigma(f)<\tau<1$ existe una constante $C_\tau>0$ de manera que $N(t)\le C_\tau t^\tau$, para todo $t>0$. Si usamos esta acotación de la función N en la integral de más arriba, se tiene para un tal τ que

$$\prod_{|z_n|>|z|}\Big(1+\frac{|z|}{|z_n|}\Big)\le\exp(C_\tau\,|z|^\tau/(1-\tau))\,.$$

Para el producto del resto de factores que conforman $f(z)$, denotamos $m = \min_{n\geq 0} |z_n| > 0$ y acotamos

$$\prod_{|z_n|\leq|z|} \Big(1+\frac{|z|}{|z_n|}\Big) \leq \Big(1+\frac{|z|}{m}\Big)^{N(|z|)} = \exp\Big(\ln\Big(1+\frac{|z|}{m}\Big)N(|z|)\Big)$$

$$\leq \exp\Big(C_\tau \ln\Big(1+\frac{|z|}{m}\Big)|z|^\tau\Big)\,.$$

Multiplicando estas estimaciones de las dos porciones del producto infinito $f(z)$ concluimos que el orden de f es a lo sumo τ. Como esto es cierto para todo $\tau \in (\sigma(f), 1)$ deducimos, como queríamos, que $\rho(f) \leq \sigma(f)$. ♣

8.4. Productos canónicos

El teorema de Hadamard, que desarrollaremos en el apartado siguiente 8.5, nos va a permitir expresar toda función entera de *orden finito* como el producto de la exponencial de un polinomio por un producto infinito de factores primarios, como los que hemos usado en la factorización de Weierstrass, en el capítulo 7, pero con ciertos ingredientes especiales.

En este apartado le presentamos al lector estos productos infinitos particulares que se conocen, conspicuamente, como *productos canónicos* y analizamos, sobre todo, la relación entre su orden de crecimiento y el exponente de convergencia de sus ceros. Le avisamos al lector que el ejemplo 8.3.6 anticipaba prescientemente algunos de los argumentos que vamos a presentar a continuación.

Supongamos que $(z_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de números complejos *no nulos* que converge a $\infty_{\mathbb{C}}$ y que tiene exponente de convergencia finito. Sea $p \geq 0$, el *menor entero* tal que

$$(\star) \quad S \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}} < +\infty\,.$$

Al producto infinito

$$P(z) = \prod_{n=0}^{\infty} E_p(z/z_n)$$

se le denomina **producto canónico**[9] **con ceros** $(z_n)_{n\geq 1}$. Al entero p, que viene determinado por la sucesión $(z_n)_{n\geq 1}$, se le denomina **género** del producto canónico P y también de la sucesión de ceros $(z_n)_{n\geq 1}$. Tome nota, lector, de que $\mathcal{Z}(P) = \{z_n\}_{n\geq 1}$. El producto canónico $P(z)$ es una función entera; vistazo, si acaso, lector, al apartado 7.3.1.

Recordemos la notación de los factores primarios E_k. Para entero $k \geq 1$,

$$E_k(z) = (1-z)\exp\Big(\sum_{j=1}^{k} \frac{z^j}{j}\Big)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,,$$

mientras que para $k = 0$,

$$E_0(z) = 1 - z\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

En la demostración del teorema 7.23 de factorización de Weierstrass, con $(z_n)_{n\geq 1}$ una sucesión arbitraria que tiende a $\infty_{\mathbb{C}}$, se usan productos infinitos del tipo

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n\Big(\frac{z}{z_n}\Big)\,,$$

[9]DRAE: 3. adj. Que se ajusta exactamente a las características de un canon.

donde el índice del factor primario varía con el índice del zero z_n, de hecho, es el mismo n. En un producto canónico la información ($\star$) sobre el crecimiento de la sucesión z_n se traduce en que podemos y usamos el mismo índice p para todos los factores primarios, es decir, usamos el mismo factor primario E_p reescalado con z/z_n.

8.4.1. Género y exponente

En virtud de ($\star$), el exponente de convergencia $\sigma(P)$ de los (z_n) no excede $p+1$; pero además, como p es el menor entero para el que ($\star$) es válido, tenemos además que $\sigma \geq p$, de manera que

$$p \leq \sigma(P) \leq p+1\,.$$

Por tanto,

$$p \leq \lfloor \sigma(P) \rfloor\,.$$

También se cumple, $p \geq \lceil \sigma(P) \rceil - 1$.

Si $\alpha > 0$ y $z_n = n^\alpha$, para $n \geq 1$, entonces p es el entero ≥ 0 más pequeño tal que $p > 1/\alpha - 1$. Es decir, $p = \lfloor 1/\alpha \rfloor$.

Para la sucesión $z_n = n\ln(1+n)$, para $n \geq 1$ se tiene $p = 1$ y $\sigma(P) = 1$, pero para $z_n = n\ln^2(1+n)$, para $n \geq 1$, se tiene $p = 0$ y $\sigma(P) = 1$.

Si $\sigma(P)$ no es entero, entonces $p = \lfloor \sigma(P) \rfloor$, pero si $\sigma(P)$ es entero entonces o bien $\sigma(P) = \lfloor \sigma(P) \rfloor$, como en le caso $z_n = n$, para $n \geq 1$, o bien $\sigma(P) = \lfloor \sigma(P) \rfloor - 1$, como en el caso $z_n = n\ln^2(1+n)$, para $n \geq 1$.

En suma, se tiene siempre que $p = \lfloor \sigma(P) \rfloor$ o $p = \lfloor \sigma(P) \rfloor - 1$; el segundo caso sólo puede darse si $\sigma(P)$ es entero.

8.4.2. Acotaciones de factores primarios

Para acotar el producto $P(z)$ y así estimar su orden de crecimiento, tendremos que acotar sus factores, así que las siguientes cotas generales para los factores primarios nos van a venir de perilla.

Lema 8.13 *Para entero $p \geq 0$,*

i) $|E_p(z)| \leq \exp\left(|z|^{p+1}\right)$ *para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \leq 1$.*

ii) $|E_p(z)| \leq (1+|z|)\exp\left(p\,|z|^p\right) \leq (1+|z|)\exp\left(p\,|z|^{p+1}\right)$ *para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \geq 1$.*

DEMOSTRACIÓN. La acotación *i*) se sigue de la cota del lema 7.20 y de que $1+x \leq e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para $|z| \geq 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}|E_p(z)| &\leq (1+|z|)\exp\left(|z| + \frac{|z|^2}{2} + \cdots + \frac{|z|^p}{p}\right)\\ &\leq (1+|z|)\exp\left(|z| + |z|^2 + \cdots + |z|^p\right) \leq (1+|z|)\,\exp\left(p\,|z|^p\right).\end{aligned}$$

Esto da la primera parte de *ii*). La segunda parte se sigue de que $|z|^p \leq |z|^{p+1}$, pues $|z| \geq 1$. ■

Denotemos, como de costumbre, con N a la función contadora de los ceros $(z_n)_{n\geq 1}$. De la condición $(\star)$ del género p se deduce que

$$(\star\star) \quad N(r) \leq S r^{p+1}\,, \quad \text{para todo } r \geq 0\,.$$

Para abrir boca, comprobamos a continuación que el orden de un producto canónico de género p es a lo sumo $p+1$. No enunciamos ese hecho formalmente como lema o como proposición porque en breve nos encontraremos con un teorema más preciso: teorema 8.14, que lo engloba.

Veamos. Denotemos $m = \min_{n\geq 0} |z_n| > 0$. Fijemos $z \in \mathbb{C}$ y pongamos $|z| = r$. Separamos los $|z_n|$ en aquellos tales que $|z_n| \geq r$ y en aquellos tales que $|z_n| < r$ y usamos las cotas del lema 8.13 y la acotación $(\star\star)$ para concluir que

$$\begin{aligned}
|P(z)| &\leq \Big(\prod_{|z_n|\leq r} |E_p(z/z_n)|\Big) \Big(\prod_{|z_n|>r} |E_p(z/z_n)|\Big) \\
&\leq (1+r/m)^{N(r)} \exp\Big(p\, r^{p+1} \sum_{|z_n|\leq r} 1/|z_n|^{p+1}\Big) \exp\Big(r^{p+1} \sum_{|z_n|>r} 1/|z_n|^{p+1}\Big) \\
&\leq (1+r/m)^{N(r)} \exp\big(p\, S\, r^{p+1}\big) \leq \exp\big(\big(p+\ln(1+r/m)\big)\, S\, r^{p+1}\big)\,.
\end{aligned}$$

Esta acotación da, como anunciábamos, que $\rho(P) \leq p+1$.

8.4.3. Orden y exponente de productos canónicos

El orden de crecimiento $\rho(P)$ y el exponente de convergencia $\sigma(P)$ de un producto canónico coinciden:

Teorema 8.14 *Para cualquier producto canónico P, el orden de crecimiento $\rho(P)$ y el exponente de convergencia de sus ceros $\sigma(P)$ coinciden: $\sigma(P) = \rho(P)$.*

Como ilustración del teorema 8.14 consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.4.1 *El orden de la función entera $1/\Gamma(z)$ es 1.*

Quizás, lector, convenga, sólo quizás, ¡eh!, echar un vistazo al apartado 7.4 dedicado a la función $\Gamma(z)$.

Pongamos $f(z) \equiv 1/\Gamma(z)$. La función f se anula, además de en $z = 0$, en los enteros no positivos. Por tanto, el exponente de convergencia $\sigma(f)$ de sus ceros es 1, así que $\rho(f) \geq \sigma(f) = 1$. Por otro lado,

$$f(z) = z\, e^{\gamma z} P(z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,,$$

donde P es el producto infinito

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 + \frac{z}{n}\big)e^{-z/n}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Este producto P es un producto canónico con conjunto de ceros $\{-n; n \geq 1\}$ y género $p = 1$. El orden del producto canónico P, en virtud del teorema 8.14, es el exponente de convergencia de sus ceros, es decir, $\rho(P) = 1$.

Con todo esto, $f \equiv 1/\Gamma$ es el producto de tres funciones z, $e^{\gamma z}$ y P de órdenes respectivos 0, 1, 1, y por tanto, $\rho(f) \leq 1$.

En suma, $\rho(1/\Gamma) = 1$. ♣

La demostración que vamos a dar de este teorema 8.14 sigue los pasos de la verificación de que $\rho(P) \leq p + 1$ que hemos presentado en el apartado 8.4.2, mejorando convenientemente las estimaciones.

DEMOSTRACIÓN. Como para cualquier función entera f se tiene que $\sigma(f) \leq \rho(f)$, sólo tenemos que probar que $\rho(P) \leq \sigma(P)$.

El exponente $\sigma(P)$ y el género p cumplen $p \leq \sigma(P) \leq p + 1$. Acabamos de verificar, justo antes del enunciado de este teorema 8.14, que $\rho(P) \leq p + 1$. Por tanto, podemos suponer en lo que sigue de demostración que $\sigma(P) < p + 1$, porque si no es así se tendría $\sigma(P) = p + 1 \geq \rho(P)$ y habríamos terminado.

Tomemos τ tal que $\sigma(P) < \tau < p + 1$. Para el contador N de ceros del producto canónico P tenemos que $N(t) \leq C_\tau\, t^\tau$, para todo $t \geq 0$.

Fijemos $z \in \mathbb{C}$ y denotemos $|z| = r$.

Para el producto de factores primarios indexados con z_n que cumplen $|z_n| > r$, acotamos

$$\begin{aligned}\prod_{|z_n|>|z|} |E_p(z/z_n)| &\leq \exp\Big(r^{p+1} \sum_{|z_n|>r} \frac{1}{|z_n|^{p+1}}\Big) \leq \exp\Big(r^{p+1} \int_r^\infty \frac{N(t)}{t^{p+2}}\, dt\Big)\\ &\leq \exp\Big(r^{p+1} C_\tau \int_r^\infty t^{\tau-p-2}\, dt\Big) = \exp\Big(r^{p+1} C_\tau \frac{r^{\tau-p-1}}{p+1-\tau}\Big) = \exp\big(\widetilde{C}_\tau r^\tau\big),\end{aligned}$$

donde $\widetilde{C}_\tau = C_\tau/(p{+}1{-}\tau)$. Hemos usado en esta acotación el lema 8.13 y el lema 8.11.

Para el producto de factores primarios indexados con z_n que cumplen $|z_n| \leq r$, acotamos, poniendo $m = \min_{n\geq 0} |z_n| > 0$:

$$\begin{aligned}\prod_{|z_n|\leq r} |E_p(z/z_n)| &\leq (1 + r/m)^{N(r)} \exp\Big(p \sum_{|z_n|\leq r} \frac{r^p}{|z_n|^p}\Big)\\ &\leq (1 + r/m)^{N(r)} \exp\Big(p \sum_{|z_n|\leq r} \frac{r^\tau}{|z_n|^\tau}\Big)\\ &\leq (1 + r/m)^{N(r)} \exp\Big(p\, r^\tau \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^\tau}}_{S_\tau \triangleq}\Big) \leq \big(1 + r/m\big)^{C_\tau\, r^\tau} \exp\big(p\, r^\tau\, S_\tau\big)\,.\end{aligned}$$

Nótese que $S_\tau < +\infty$, puesto que $\tau > \sigma(P)$. En esta acotación hemos usado el lema 8.13 y que si $r/|z_n| \geq 1$ se tiene que $(r/|z_n|)^p \leq (r/|z_n|)^\tau$ pues $\tau > \sigma(P) \geq p$.

Multiplicando estas dos acotaciones se deduce que $\rho(P) \leq \tau$, para cualquier τ en el intervalo $(\sigma(P), p+1)$, y, por consiguiente, que $\rho(P) \leq \sigma(P)$ como queríamos probar. ■

8.4.4. Derivada logarítmica de un producto canónico

Para entero $k \geq 0$ y cada $j \geq k$, se tiene que

$$\Big(\frac{E_k'(z)}{E_k(z)}\Big)^{(j)} = -\frac{j!}{(1-z)^{j+1}}\,, \qquad \text{para todo } z \in \ C\,.$$

Este es el lema 7.21.

Como consecuencia, para productos canónicos tenemos el siguiente lema:

Lema 8.15 *Para un producto canónico P de género $p \geq 0$ con ceros $(z_n)_{n\geq 1}$ (recordemos que $z_n \neq 0$, para $n \geq 1$) se tiene entonces para todo $j \geq p$ que*

$$\Big(\frac{P'(z)}{P(z)}\Big)^{(j)} = -j!\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z_n - z)^{j+1}}\,, \qquad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

8.5. Teorema de factorización de Hadamard

El teorema 7.23 de factorización de Weierstrass nos dice que cualquier función entera $f(z)$ se puede factorizar en la forma

$$\text{(W)} \qquad f(z) = z^k e^{g(z)} F(z)\,.$$

donde k es un entero $k \geq 0$, la función $F(z)$ es un producto (quizás infinito) de factores primarios de índice variable (y, por tanto, no canónico) donde $g(z)$ es una función entera.

El teorema de factorización de Hadamard que ahora nos ocupa precisa espléndidamente el teorema de Weierstrass para funciones enteras de *orden finito*, y afirma que, en ese caso de orden finito, se puede tomar g como un polinomio y la función F como producto canónico de los ceros de f .

El teorema de factorización de Hadamard es un zócalo donde se fundamenta el análisis del propio Hadamard de la función ζ de Riemann y la localización de sus ceros. Consúltense los capítulos 11, sobre integrales holomorfas, y 12, sobre series de Dirichlet.

El artículo de Hadamard, [45], donde elabora el teorema de factorización, entre otras herramientas como la fórmula de Hadamard, teorema 8.9, que relaciona el orden con los coeficientes de Taylor de una función entera, se titula, por más señas, *Etude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann.*[10]

La idea de la factorización de Hadamard es la siguiente. Supongamos que la función entera $f(z)$ tiene orden finito. El factor z^k registra el orden de $z = 0$ como cero de $f(z)$. Dividiendo $f(z)$ por z^k, lo que no afecta al orden, podemos suponer que $f(z)$ no se anula en $z = 0$.

Como el orden $\rho(f)$ es finito, se tiene que el exponente $\sigma(f)$ de los ceros no nulos de $f(z)$ es finito, pues $\sigma(f) \leq \rho(f)$. Con cierto entero p tal que $p + 1 > \sigma(f)$, o con $p + 1 = \sigma(f)$ si fuera el caso que $\sum_{n=1}^{\infty} (1/|z_n|)^{\sigma(f)} < +\infty$ y $\sigma(f)$ fuese entero ≥ 1, podemos usar en la factorización de Weierstrass un producto canónico P en lugar del producto infinito $F(z)$. El cociente f/P sería una función entero que no se anula en $\mathbb{C}$ y se escribe $f/P = e^g$ donde g es entera. La clave, el busilis, vaya, de la factorización de Hadamard es que el orden de f/g no excede al de f, y eso obliga a que g sea un polinomio de grado a lo sumo $\rho(f)$.

Teorema 8.16 (Teorema de factorización de Hadamard) *Sea f una función entera no nula de orden finito, $\rho(f) < +\infty$, entonces f se factoriza*

$$\text{(H)} \qquad f(z) = z^k\, e^{Q(z)}\, P(z)\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}\,,$$

donde

[10] . . . travail couronné en 1892 (Grand Prix des Sciences Mathématiques). . .

- *el entero $k \geq 0$ es el orden de $z = 0$ como cero de f,*
- *Q es un polinomio de grado $\leq \lfloor \rho(f) \rfloor$,*
- *P es el producto canónico formado con los ceros no nulos de f.*

La factorización de Hadamard de una función entera $f(z)$ de orden finito es esencialmente única. Veamos. El factor z^k y el producto canónico $P(z)$ vienen determinados completamente por los ceros de f. En consecuencia, el polinomio $Q(z)$ está determinado salvo que podemos añadirle un múltiplo entero de $2\pi\imath$.

De la factorización (H) se deduce que

$$\rho(f) \leq \max\left\{\text{grado}(Q), \rho(P)\right\},$$

y como grado$(Q) \leq \rho(f)$ y como $\rho(P) = \sigma(P) = \sigma(f) \leq \rho(f)$, se tiene que

$$\rho(f) = \max\left\{\text{grado}(Q), \sigma(P)\right\}.$$

Observe, lector, que, recíprocamente, si una función entera f admite la factorización (H), con Q un polinomio y P un producto canónico, entonces la función entera $f(z)$ tiene orden finito, de hecho, $\rho(f) = \max\{\text{grado}(Q), \sigma(P)\}$.

Antes de proceder a la demostración del teorema 8.16, veamos unos cuantos, varios, ¡oiga!, corolarios.

Corolario 8.17 *Si f es una función entera de orden finito* no entero*, entonces f toma cualquier valor $a \in \mathbb{C}$ infinitas veces.*

Además, en este caso, $\sigma(f) = \rho(f)$

demostración. Como para cualquier $a \in \mathbb{C}$ se tiene que $\sigma(f - a) = \sigma(f)$, basta ver que f tiene infinitos ceros. Si f sólo tuviera un número finito de ceros, entonces f se escribiría como $f = e^Q P$, donde P, en este caso, sería un polinomio, pero entonces $\rho(f)$ sería el grado de Q que es entero.

Se tiene $\sigma(f) \leq \rho(f)$ pues esto ocurre para cualquier función entera. Supongamos que $\sigma(f) < \rho(f)$. El exponente $\sigma(f)$ es el exponente de los ceros de f, es decir, $\sigma(f) = \sigma(P)$. Para el producto canónico P se tiene, véase el teorema 8.14, que $\sigma(P) = \rho(P)$. De manera que $\rho(P) = \sigma(P) = \sigma(f) < \rho(f)$. Por tanto, $\rho(f) = \text{grado}(Q)$, que es un entero. Contradicción. ■

¡Asombroso!

Para funciones de orden entero la conclusión del corolario 8.17 no es cierta: para entero k la función $f(z) = e^{z^k}$ tiene orden $\rho(f) = k$, no se anula, y, claro, $\sigma(f) = 0$.

¡Y sutil!, esta discontinuidad en los enteros.

Corolario 8.18 *Si la función entera $f(z)$ tiene orden finito y no se anula entonces $f(z) = e^{Q(z)}$ donde Q es un polinomio, y recíprocamente. En este caso, $\rho(f) =$ grado(Q) es entero.*

Recuerde, lector, que este resultado ya apareció como la proposición 8.10. El argumento de la demostración de esta proposición surgirá de nuevo en la demostración del propio teorema de Hadamard.

Para orden $\rho(f) = 0$, el teorema de Hadamard da que

Corolario 8.19 *Si f es una función entera de orden nulo $\rho(f) = 0$ entonces f se factoriza como*

$$f = c\,z^k \prod_{n\geq 1} \Big(1 - \frac{z}{z_n}\Big)\,, \qquad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}\,,$$

donde $c \neq 0$ es una constante, $k \geq 0$ es un entero y $(z_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión (quizás finita o vacía) de números complejos no nulos tales que $\sum_{n\geq 1} 1/|z_n| < +\infty$.

Baste observar que en este caso el género p es $p = 0$, pues $p \leq \rho(f) = 0$ y que grado$(Q) = 0$, pues grado$(Q) \leq \rho(f) = 0$. Observe, lector, que los z_n son los ceros no nulos de $f(z)$.

Para orden $\rho(f) \leq 1$, el teorema de Hadamard da que

Corolario 8.20 *Si f es entera de orden $\rho(f) \leq 1$ con ceros no nulos $z_n, n \geq 1$, entonces para ciertos $a, b \in \mathbb{C}$ y entero $k \geq 0$,*

$$\textit{si } \sum\nolimits_n 1/|z_n| < +\infty, \textit{ entonces } f(z) = z^k\, e^{az+b} \prod\nolimits_n \big(1 - z/z_n\big)\,,$$

$$\textit{si } \sum\nolimits_n 1/|z_n| = +\infty, \textit{ entonces } f(z) = z^k\, e^{az+b} \prod\nolimits_n \big(1 - z/z_n\big)e^{z/z_n}\,.$$

En el primer caso, el género (del producto canónico) es 0, en el segundo es 1.

En realidad, podemos agrupar las alternativas recogidas en el corolario 8.20 en una única fórmula:

$$f(z) = z^k\, e^{az+b} \prod\nolimits_n \big(1 - z/z_n\big)e^{z/z_n}\,,$$

porque si $S \triangleq \sum_n 1/|z_n| < +\infty$, podemos escribir $\prod_n e^{z/z_n} = e^{S\,z}$ y englobar este término en $e^{a\,z}$.

De la factorización *canónica* del teorema de Hadamard se deducen otras factorizaciones similares.

Corolario 8.21 *Sea $f(z)$ una función entera de orden $\rho(f)$ finito y sea $(z_n)_{n\geq 1}$ la sucesión de sus ceros no nulos con género p.*

Sea p^* un entero tal que $p^* \geq p$. La función $f(z)$ se factoriza

$$(\mathrm{H})^* \quad f(z) = z^k e^{Q^*(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p^*}(z/z_n)\,, \quad \textit{para } z \in \mathbb{C}\,,$$

donde k es el orden de 0 como cero de f y Q^* es un polinomio de grado $\leq \max\{p^*, \lfloor \rho(f) \rfloor\}$.

demostración. Denotemos $S_j = \sum_{n=1}^{\infty} 1/z_n^j$, para $j \geq p+1$. Sea P el producto canónico de los ceros de f y Q el polinomio de la factorización de Hadamard.

Se tiene

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p^*}(z/z_n) = P(z) \exp\Big(\sum_{j=p+1}^{p^*} S_j z^j\Big)\,.$$

La factorización (H)* se cumple tomando $Q^*(z) = Q(z) - \sum_{j=p+1}^{p^*} S_j z^j$. ■

La siguiente *factorización es casi tan canónica* como la del teorema 8.16.

Corolario 8.22 *Sea $f(z)$ una función entera de orden $\rho(f)$ finito y sea $(z_n)_{n\geq 1}$ la sucesión de sus ceros no nulos.*

Sea $q = \lfloor \rho(f) \rfloor$.

Entonces $f(z)$ se factoriza en la forma

$$f(z) = z^k e^{R(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_q(z/z_n)\,,$$

donde k es el orden de 0 como cero de f y R es un polinomio de grado $\leq q$.

demostración. Basta aplicar el corolario anterior y recordar que $q \geq p$, pues

$$p \leq \lfloor \sigma(P) \rfloor = \lfloor \sigma(f) \rfloor \leq \lfloor \rho(f) \rfloor = q\,.$$

■

Ejemplo 8.5.1 *Fórmula de Euler del seno a través del teorema de factorización de Hadamard.*

Sea $f(z) = \operatorname{sen}(\pi z)$ para $z \in \mathbb{C}$. La función f se anula en los enteros. El producto canónico P con sus ceros no nulos tiene género $p = 1$. De hecho,

$$P(z) = \prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Big(1 - \frac{z}{n}\Big) e^{z/n} = \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

La función f tiene orden 1. La factorización de Hadamard, teorema 8.16, o su corolario 8.20, nos dice que, para ciertas constantes $A, B \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{sen}(\pi z) = z e^{Az+B} P(z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Como $P(0) = 1$ y $\lim_{z\to 0} \operatorname{sen}(\pi z)/z = \pi$, ha de ser $e^B = \pi$. Así que

$$\operatorname{sen}(\pi z) = \pi z e^{Az} P(z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Ahora bien, como $P(z)$ y $\operatorname{sen}(\pi z)/(\pi z)$ son funciones pares, se deduce que e^{Az} es función par, es decir, $e^{Az} = e^{-Az}$, para todo $z \in \mathbb{C}$, de donde $A = 0$.

Concluimos que

$$\operatorname{sen}(\pi z) = \pi\, z\, P(z) = \pi\, z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,,$$

que es la fórmula de Euler. ♣

EJEMPLO 8.5.2 *Factorización de Hadamard de la función entera $f(z) = e^z - 1$.*

La función $f(z)$ se anula en los $z_n = 2n\pi\imath$, para $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y en $z = 0$; todos ceros de orden 1. El exponente de convergencia de los ceros (no nulos) de f es 1. El genero es $p = 1$.

Así que el producto canónico asociado es

$$P(z) = \prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Big(1 - \frac{z}{2\pi\imath n}\Big) e^{z/(2\pi\imath n)} = \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}\Big), \quad \text{para } z \in \mathbb{C}.$$

Para obtener la última identidad hemos agrupado pares de términos correspondientes a n y $-n$, para cada $n \geq 1$. La legalidad de este agrupamiento queda justificada por la convergencia absoluta del producto infinito P.

El teorema de factorización de Hadamard nos da que $f(z)$ se factoriza en la forma

$$f(z) = zP(z)e^{Az+B}\,, \quad \text{para } z \in \mathbb{C}\,,$$

para ciertas constantes $A, B \in \mathbb{C}$.

Como $\lim_{z\to 0} f(z)/z = 1$ y $P(0) = 1$, se tiene que ha de ser $e^B = 1$. De manera que

$$f(z) = zP(z)e^{Az}\,, \quad \text{para } z \in \mathbb{C}\,.$$

De que $f(-z) = -e^{-z} f(z)$ y $P(z) = P(-z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$, se deduce que $e^{2Az} = e^z$, para todo $z \in \mathbb{C}$, y, por tanto, que $A = 1/2$.

Se concluye la deseada factorización de Hadamard de $e^z - 1$:

$$(\star) \qquad e^z - 1 = z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}\Big) e^{z/2}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\,.$$

Por cierto, tomando derivada logarítmica en la factorización $(\star)$, y tras aseo algebraico, se deduce la descomposición en fracciones simples (descomposición de Mittag-Leffler) de la función de Euler $\mathcal{E}(z)$ generatriz exponencial de los números de Bernoulli:

$$\mathcal{E}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{z^2 + 4n^2\pi^2}\,, \quad \text{para } z \in \mathbb{C}\,.$$

De aquí se deducen las fórmulas de los números de Bernoulli en términos de los valores de la función ζ en los enteros pares positivos, o de éstos en términos de aquellos:

$$\frac{B_{2k}}{(2k)!} = 2\,(-1)^{k+1} \frac{\zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}}\,, \quad \text{para cada } k \geq 1\,.$$

Además, se deduce que $B_0 = 1, B_1 = -1/2$ y $B_{2k+1} = 0$, para todo $k \geq 1$. ♣

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 8.16 DE FACTORIZACIÓN DE HADAMARD.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que f no se anula en $z = 0$ y de hecho que $f(0) = 1$. Denotemos por d a la parte entera de $\rho(f)$, es decir, $d = \lfloor \rho(f) \rfloor$.

Sea P el producto canónico formado con los ceros de f. El género p de este producto canónico satisface $p \leq \sigma(f) \leq p + 1$. Además $\sigma(f) \leq \rho(f)$. De manera que $p \leq \rho(f)$, es decir, $p \leq d$.

La función f/P es entera y no se anula en todo $\mathbb{C}$, de manera que tiene un logaritmo holomorfo Q y podemos escribir que

$$f(z) = e^{Q(z)} P(z) \, .$$

Resta probar que Q es un polinomio de grado $\leq \rho(f)$, es decir, de grado $\leq d$.

La idea, claro, ¿verdad, lector?, es que $e^Q = f/P$, y queremos aprovechar la información sobre el orden de f y sobre los ceros de P para controlar Q.

Para verificar que de hecho Q es un polinomio de grado $\leq d$, vamos a comprobar[11] que su derivada de orden $d + 1$ es idénticamente nula:

$$Q^{(d+1)} \equiv 0 \, .$$

Como $d \geq p$, el lema 8.15 nos da que

$$\left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right)^{(d)} = Q^{(d+1)}(z) - d! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z_n - z)^{d+1}} \, , \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \, .$$

En esta identidad la derivada $Q^{(d+1)}$ se expresa en términos de f, que tiene orden $\rho(f)$, y de un sumatorio que involucra los ceros de f que tienen género p.

Fijemos $R > 0$. Introducimos la función (auxiliar) entera f_R que se obtiene quitándole a f los ceros que pudiera tener en el disco cerrado $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(0, R))$. Pongamos

$$f_R(z) = \frac{f(z)}{\prod_{|z_n| \leq R} \big(1 - z/z_n\big)} \, , \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \, .$$

Nótese que $f_R(0) = f(0) = 1$.

Observe, lector, que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f_R'(z)}{f_R(z)} - \sum_{|z_n| \leq R} \frac{1}{z_n - z} \, , \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \, ,$$

y que, por tanto,

$$\left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right)^{(d)} = \left(\frac{f_R'(z)}{f_R(z)} \right)^{(d)} - d! \sum_{|z_n| \leq R} \frac{1}{(z_n - z)^{d+1}} \, , \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \, .$$

[11] El argumento que sigue es debido a Edmund Landau.

Con esto, para cada $R>0$ fijo se tiene que

$$Q^{(d+1)}(z)=\underbrace{\left(\frac{f_R'(z)}{f_R(z)}\right)^{(d)}}_{\triangleq A_R(z)}+\underbrace{d!\sum_{|z_n|>R}\frac{1}{(z_n-z)^{d+1}}}_{\triangleq B_R(z)}\,,\qquad \text{para todo } z\in\mathbb{C}$$

Vamos a verificar a continuación que para $z\in\mathbb{C}$ fijo, los dos sumandos, $A_R(z)$ y $B_R(z)$, de esta expresión de $Q^{(d+1)}(z)$, convergen a 0 cuando $R\uparrow\infty$. En consecuencia, concluiremos que, como se quería ver, $Q^{(d+1)}(z)=0$, para todo $z\in\mathbb{C}$.

Tomemos τ tal que $\rho(f)<\tau<d+1$. Note, lector, que esta elección de τ es posible porque $d=\lfloor\rho(f)\rfloor$, así que $\rho(f)<d+1$.

En las estimaciones que siguen aparecerán varias constantes que dependen de τ y de d pero no de R y que para aliviar la carga notacional denotamos genéricamente por M.

La comprobación de que $B_R(z)$ tiende a 0 es bien directa, puesto que los sumandos de $B_R(z)$ van desapareciendo cuando $R\to\infty$.

• Para acotar $B_R(z)$, observe, lector, que si $R>2\,|z|$ entonces

$$|z_n-z|>|z_n|/2\,,\quad \text{si } |z_n|>R\,,$$

y, por tanto, si $R>2\,|z|$, se cumple

$$|B_R(z)|\le 2^{d+1}\,d!\sum_{|z_n|>R}\frac{1}{|z_n|^{d+1}}\,.$$

Como $p\le d$, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty}1/(|z_n|^{d+1})<+\infty$, y por tanto,

$$\lim_{R\to\infty}|B_R(z)|=0\,,\qquad \text{para todo } z\in\mathbb{C}\,.$$

La acotación de $A_R(z)$ es más laboriosa.

• Vamos ahora con la acotación de $A_R(z)$. Dividimos el análisis en unos cuantos pasos encadenados.

1) Si $|z|\ge 2R$, entonces $|f_R(z)|\le|f(z)|$. Esto se sigue de que si $|z|\ge 2R$ y $|z_n|<R$ entonces $|1-z/z_n|\ge|z/z_n|-1\ge 1$.

Por tanto, $|f_R(z)|\le\exp(M|z|^\tau)$, si $|z|\ge 2R$. En particular, $|f_R(z)|\le\exp(MR^\tau)$, si $|z|=2R$. Por el principio del módulo máximo tenemos que

$$|f_R(z)|\le\exp(MR^\tau)\,,\quad \text{para todo } z \text{ tal que } |z|\le 2R\,.$$

2) La función f_R no se anula en un disco $\mathbb{D}(0,S)$ con $S>R$, que podemos suponer $S<2R$.

En ese disco $\mathbb{D}(0,S)$ podemos tomar un logaritmo holomorfo g_R de f_R. Es decir, g_R es holomorfa en $\mathbb{D}(0,S)$ y $\exp(g_R) \equiv f_R$. Además, como $f_R(0) = f(0) = 1$, podemos suponer que $g_R(0) = 0$.

Por el punto 1) anterior tenemos que

$$\Re(g_R(z)) \le MR^\tau\,, \quad \text{para todo } z \text{ tal que } |z| \le S\,.$$

3) Por el punto 2) y por el lema 4.24 de Borel-Carathéodory, que acota el módulo de una función holomorfa en términos de acotaciones de su parte real, tenemos que

$$|g_R(z)| \le MR^\tau \frac{|z|}{S-|z|}\,, \quad \text{para todo } z \text{ tal que } |z| < S\,.$$

En particular,

$$|g_R(z)| \le MR^\tau\,, \quad \text{para todo } z \text{ tal que } |z| \le R/2\,.$$

4) Por las acotaciones integrales de Cauchy y la acotación del punto 3) se tiene que

$$\big|g_R^{(d+1)}(z)\big| \le M\,R^{\tau-(d+1)}\,, \quad \text{para todo } z \text{ tal que } |z| \le R/2\,.$$

Como $g_R' \equiv f_R'/f_R$, se deduce que

$$A_R(z) \le M\,R^{\tau-(d+1)}\,, \quad \text{para todo } z \text{ tal que } |z| \le R/2\,.$$

Usando ahora que $\tau < d+1$, fijando $z \in \mathbb{C}$ y haciendo $R \uparrow +\infty$ concluimos, finalmente, que

$$\lim_{R\uparrow+\infty} A_R(z) = 0\,.$$

■

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 8

Fórmula de Jensen. Productos de Blaschke

8.5.1 *Dedúzcase el teorema fundamental del álgebra a partir de la fórmula de Jensen.*

8.5.2 *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$ que toma valores en un dominio simplemente conexo Ω. Demuéstrese que para todo $w \in \Omega$ se tiene que*

$$\sum_{z\in\mathbb{D};\, f(z)=w} (1-|z|) < +\infty\,.$$

8.5.3 *Hállense todas las funciones enteras $f(z)$ que verifican que $|f(z)| = 1$ para todo z tal que $|z| = 1$.*

8.5.4 *Demuéstrese que para todo $r, s \in [0, 1)$ se tiene que*

$$\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\frac{re^{\imath\theta}-se^{\imath\phi}}{1-re^{\imath\theta}se^{-\imath\phi}}\right| d\theta\, d\phi = \ln(\text{máx}\,(r,s))\,.$$

8.5.5 *Sea f una función entera no idénticamente nula tal que para cada entero $n \geq 1$ tiene al menos un cero en cada circunferencia $\{|z| = n\}$. Demuéstrese que*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln(M(f,r))}{r} = +\infty\,.$$

8.5.6 *Sea f una función entera. Para cada $r \geq 0$, sea $M(r) = \text{máx}\{|f(z)| : |z| \leq r\}$. Supongamos que $f(0) \neq 0$ y sean $\{z_n\}$ los ceros de f. Demuéstrese que si para $k > 0$ se tiene que*

$$\int_1^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{k+1}} < \infty\,,$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^k} < \infty\,.$$

Funciones enteras de orden finito

8.5.7 *Compruébese, usando factorización de Hadamard, que si $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ y si $R(z)$ es un polinomio, entonces la ecuación $e^{\lambda z} - R(z) = 0$ tiene infinitas soluciones.*

8.5.8 *Sea $a \neq b \in \mathbb{C}$. Supongamos que la función $f(z)$ es entera, es de orden finito y toma cada uno de los valores a, b sólo un número finito de veces. Compruébese que f es un polinomio.*

8.5.9 *Compruébese que la ecuación $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^3} = \pi$ tiene al menos una solución.*

8.5.10 *Compruébese que si $f(z)$ una función entera que verifica que*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\max_{|z|=r} |f(z)|}{r^3/2} = 1\,,$$

entonces $f(z)$ tiene infinitos ceros.

8.5.11 *Determínese el producto canónico con ceros $m+n\imath$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, excluyendo $m = n = 0$.*

8.5.12 *Demuéstrese que cada una de las ecuaciones siguientes tienen infinitas raíces*

$$e^z = z, \quad \operatorname{sen}(z) = z^2, \quad \log z = z^3, \quad \tan z = az + b$$

donde a y b son números complejos excluyendo $a = 0$, $b = \pm\imath$.

8.5.13 *Sea $f(z)$ una función entera de orden $\sqrt{2}$ con desarrollo de Taylor en el origen dado por*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

con $a_0 \neq 0$. Sea $e^{Q(z)}P(z)$ su factorización de Hadamard. Determínese $Q(z)$ en términos de los coeficientes a_0, a_1, a_2.

8.5.14 *Demuéstrese que no hay ninguna función entera de orden 3/2 cuyo conjunto de ceros esté contenido en $\{n^2 + \imath\, n^2,\ n = 1, 2, \ldots\}$.*

8.5.15 *Demuéstrese que si $f(z)$ es un producto canónico con ceros z_n tales que*

$$\sum |z_n|^{-1}$$

es convergente, entonces para cada $b > 0$, se tiene $f(z) = O(e^{b|z|})$ y $|f(z)| > e^{-b|z|}$ en círculos de radio arbitrariamente grande.

8.5.16 *Sea $f(z)$ una función entera de orden menor que 2, real para z real que sólo tiene ceros enteros. Demuéstrese que $f'(z)$ tienen el mismo genero que $f(z)$.*

8.5.17 *Sea f una función de orden ρ y sea $P(z)$ un polinomio de grado d. ¿Qué puede decirse de los órdenes de $P(f(z))$ y de $f(P(z))$?.*

8.5.18 *Sea f una función entera de orden ρ y con n ceros. Demuéstrese que f' tiene exactamente $n+\rho-1$ ceros. Como aplicación, demuéstrese que para cualquier polinomio $Q(z)$, la ecuación $\operatorname{sen} z = Q(z)$ tiene infinitas soluciones.*

8.5.19 *Sea f una función entera par, es decir $f(z) = f(-z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, y que tiene infinitos ceros. Demuéstrese que el orden de f es un entero par. Como aplicación, demuéstrese que para cualquier polinomio $P(z)$ la ecuación $P(\cos z) = 0$ tiene infinitas soluciones.*