Capítulo 4

Del lema de Schwarz al teorema de Picard

ALGUNOS HÉROES: Schwarz, Bloch, Weierstrass, Landau, Schottky, Picard, ...

4.1. El lema de Schwarz

La primera versión del lema de Schwarz que vamos a discutir seguidamente tiene un enunciado sencillo y muy específico, hasta el punto de que pudiera parecer casi una consideración marginal. No es el caso. Las sucesivas amplificaciones y generalizaciones que vamos ir describiendo exhibirán su asombrosa potencia y utilidad.

Lema 4.1 (Lema de Schwarz) *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$ tal que*

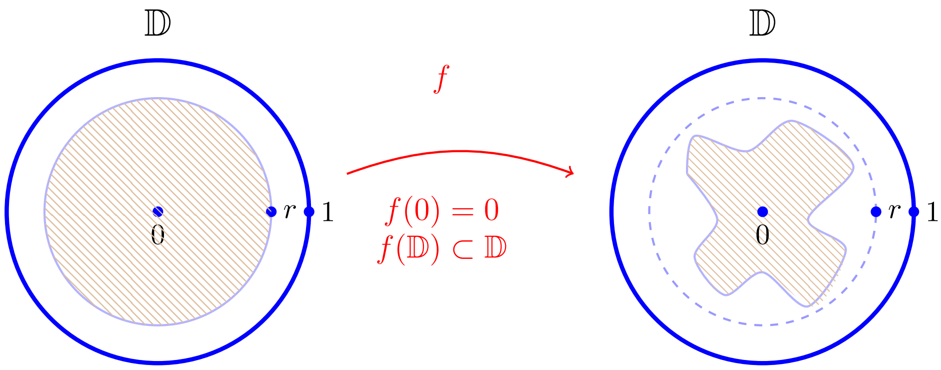
$$f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D} \text{ y } f(0) = 0\,.$$

Entonces

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,,$$

y además,

$$|f'(0)| \leq 1\,.$$



Dibujo 4.1. Lema de Schwarz.

En esta versión del lema de Schwarz todo está normalizado: f lleva $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$, es decir, $|f(z)| < 1$, para todo $z \in \mathbb{D}$ y $f(0) = 0$. Más adelante veremos versiones más generales para discos arbitrarios sin exigir que f lleve el centro en el centro, ciertas versiones invariantes, versiones con más ceros, etc., todas ellas variaciones de la versión básica anterior.

Obsérvese que la segunda conclusión del lema de Schwarz se sigue de la primera, pues, $|f'(0)| = \lim_{z \to 0} |f(z)|/|z|$.

En términos algo más geométricos, el lema dice que

$$f(\mathbb{D}(0,r)) \subset \mathbb{D}(0,r), \quad \text{para cada } 0 < r \leq 1\,.$$

demostración. Supongamos primero que f es holomorfa en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$. Luego con un sencillo truco (estándar y de uso muy habitual) veremos cómo pasar al caso general en el que f es solo holomorfa en $\mathbb{D}$ y no en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$.

En este caso, tenemos, por continuidad, que $|f(z)| \leq 1$, si $z \in \partial\mathbb{D}$. Consideremos la función g definida en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ por

$$g(z) = \begin{cases} f(z)/z, & \text{si } z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}) \setminus \{0\}\,, \\ f'(0), & \text{si } z = 0\,. \end{cases}$$

Esta función g es holomorfa en $\mathrm{cl}(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$, y continua en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$, así que tiene una singularidad evitable en $z = 0$ y es, por tanto, holomorfa en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$.

Además, para todo $z \in \partial\mathbb{D}$ se tiene que

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} = |f(z)| \leq 1\,.$$

Por tanto, por el principio del módulo máximo, teorema 2.3, deducimos que, para todo $z \in \mathbb{D}$, $|g(z)| \leq 1$, lo que de una tacada da las dos conclusiones deseadas para f.

Pasamos al caso general en que no suponemos a priori que f sea holomorfa en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$. Fijemos $0 < r < 1$ (nos interesará al final tomar r próximo a 1) y consideremos la función g_r definida en $|z| < 1/r$ y dada por $g_r(z) = f(rz)$. Obsérvese que g_r es holomorfa en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ y que $g_r(0) = 0$. Además $g_r(\mathbb{D}) = f(\mathbb{D}(0, r)) \subset f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Por el caso particular anterior, concluimos que si $0 < r < 1$, entonces

$$|f(rz)| = |g_r(z)| \leq |z|, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Fijando $z \in \mathbb{D}$ y haciendo $r \uparrow 1$, se deduce que

$$|f(z)| \leq |z|, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Asimismo por el caso particular anterior, tenemos que si $0 < r < 1$, entonces

$$r|f'(0)| \leq 1\,.$$

Haciendo $r \uparrow 1$, se concluye que $|f'(0)| \leq 1$. ■

El siguiente lema describe cuándo se puede dar igualdad en las conclusiones del lema de Schwarz.

Lema 4.2 (Igualdad en el lema de Schwarz) *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$ tal que*

$$f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D} \quad y \quad f(0) = 0\,.$$

Si para algún $z \in \mathbb{D}$, $z \neq 0$, se tiene que $|f(z)| = |z|$, o si $|f'(0)| = 1$, entonces f es una rotación, es decir existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(z) = e^{\imath\theta} z, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}.$$

Cabe señalar que en particular este caso de igualdad nos dice que si $|f'(0)| = 1$ entonces $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, pues f es una rotación. Esto invita a pensar que si $|f'(0)|$ es próximo a 1, entonces debiera ocurrir que $f(\mathbb{D})$ debe contener un disco de centro 0 y radio próximo a 1.

demostración. Consideramos la función g en $\mathbb{D}$ dada por $g(z) = f(z)/z$ para $z \in \mathbb{D}, z \neq 0$, y con $g(0) = f'(0)$. Por el teorema de singularidad evitable, g es holomorfa en $\mathbb{D}$ y por el lema de Schwarz, $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. La hipótesis del lema nos dice que para un cierto $z \in \mathbb{D}$ (quizás $z = 0$) se tiene que $|g(z)| = 1$. El principio del módulo máximo, teorema 2.2, nos dice que g es una constante, necesariamente de módulo 1, es decir, que existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$g(z) = e^{\imath\theta}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,,$$

lo que traducido a f da el resultado buscado. ■

Ejemplo 4.1.1 ***Desarrollo de Taylor y lema de Schwarz.*** *Si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, entonces $|f'(0)| \leq 1$. De hecho, si el desarrollo de Taylor de f alrededor de $z = 0$ es*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n\,,$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \leq 1\,.$$

En particular, como $a_0 = f(0)$ y $a_1 = f'(0)$, se tiene que

$$|f(0)|^2 + |f'(0)|^2 \leq 1\,.$$

Se deduce, como consecuencia, que en el lema de Schwarz no hace falta suponer que $f(0) = 0$ para obtener la conclusión de que $|f'(0)| \leq 1$.

Fijemos $0 < r < 1$, que luego haremos tender a 1. Para todo $\theta \in [0, 2\pi]$ se cumple que

$$f(re^{\imath\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, r^n\, e^{\imath n\theta}.$$

La convergencia de la serie de la derecha es uniforme en el intervalo $[0, 2\pi]$, pues, como bien sabe el lector, la serie de potencias de f converge uniformemente a f en $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(0, r))$. Tomando conjugados, tenemos asimismo

$$\overline{f(re^{\imath\theta})} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n}\, r^n\, e^{-\imath n\theta}.$$

Multiplicando estas dos series obtenemos la serie doble

$$|f(re^{\imath\theta})|^2 = \sum_{n,k\geq 0} a_n\, \overline{a_k}\, r^{n+k}\, e^{\imath(n-k)\theta}\,.$$

Una llamada de atención: la serie doble converge para cada $\theta \in [0, 2\pi]$, en el sentido de que

$$|f(re^{\imath\theta})|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{0\le n,k\le m} a_n\, \overline{a_k}\, r^{n+k}\, e^{\imath(n-k)\theta}\,;$$

además la convergencia es uniforme:

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \Big| |f(re^{\imath\theta})|^2 - \sum_{0\le n,k\le m} a_n\, \overline{a_k}\, r^{n+k}\, e^{\imath(n-k)\theta} \Big| = 0\,.$$

Consulte, lector, si lo tiene a bien, la nota 4.1.3 ubicada tras la discusión de este ejemplo.

Como la convergencia es uniforme, al integrar en el intervalo $[0, 2\pi]$ (con r fijo todavía), tenemos que

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{\imath\theta})|^2 d\theta = \lim_{m\to\infty} \sum_{0\le n,k\le m} a_n\, \overline{a_k}\, r^{n+k} \int_0^{2\pi} e^{\imath(n-k)\theta} d\theta = 2\pi \lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m} |a_j|^2\, r^{2j}.$$

Por tanto, la serie de términos positivos $|a_j|^2 r^{2j}$ es sumable (lo que, en cualquier caso, se sigue de que el radio de convergencia de la serie de potencias es al menos 1), y, de hecho, su suma viene dada por:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{\imath\theta})|^2 d\theta = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2\, r^{2j}.$$

El promedio integral del lado izquierdo no excede 1, porque $|f(re^{\imath\theta})| \le 1$, para cualquier $\theta \in [0, 2\pi]$. Por tanto,

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2\, r^{2j} \le 1\,,$$

sea cual sea $0 < r < 1$. Obsérvese que, en esta desigualdad, la serie en la izquierda crece con r, y que si formalmente se sustituye $r = 1$ se obtiene la desigualdad buscada. Para justificar esta substitución procedemos como sigue. Para un entero $N \ge 1$ cualquiera, se tiene que

$$\sum_{j=0}^{N} |a_j|^2\, r^{2j} \le 1\,.$$

para cualquier $0 < r < 1$. En esta suma finita (con N fijo) podemos hacer $r \uparrow 1$ y deducir que

$$\sum_{j=0}^{N} |a_j|^2 \le 1\,.$$

Como esto es válido para todo entero $N \geq 1$, se deduce que

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 \leq 1\,,$$

como se quería demostrar. ■

☞ **Nota** 4.1.1. ☜ Obsérvese que como

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{\imath\theta})|^2 d\theta = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2\, r^{2j},$$

la función real

$$r \in [0,1) \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{\imath\theta})|^2 d\theta$$

es creciente sea cual sea la función holomorfa en $\mathbb{D}$.

De la discusión del ejemplo 4.1.1 se deduce que para cualquier f holomorfa en $\mathbb{D}$ se tiene que

$$\sup_{r\in[0,1)} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{\imath\theta})|^2 d\theta = \lim_{r\uparrow 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{\imath\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\,.$$

♠

☞ **Nota** 4.1.2. ☜ Obsérvese que en la discusión del ejemplo 4.1.1 se ha demostrado la primera parte de la proposición que sigue a continuación; la segunda parte se sigue de expresar la integral pertinente en coordenadas polares y usar la primera parte.

Proposición 4.3 *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$ y sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ su desarrollo en serie de potencias alrededor de $z = 0$. Si $0 < r < 1$, entonces se tiene que*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{\imath\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\; r^{2n}\,,$$

y

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}(0,r)} |f(z)|^2\, dA(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}\; r^{2n+2}\,.$$

Aquí dA es el "elemento de área", que en coordenadas polares se expresa $dA = r dr d\theta$. ♠

☞ **Nota** 4.1.3. ☜ Esta nota elabora la convergencia de la serie doble

$$\sum_{0\leq n,k\leq m} a_n\; \overline{a_k}\; r^{n+k}\; e^{\imath(n-k)\theta}$$

del ejemplo 4.1.1.

Sea f una función holomorfa en el disco $\mathbb{D}$ con el siguiente desarrollo en serie de potencias alrededor de $z = 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n\,.$$

Para $r \in [0,1)$ denotamos $M(r) = \max_{|z|\le r} |f(z)|$; para $r \in [0,1)$ y entero $n \ge 1$,

$$A(n,r) \triangleq \max_{|z|\le r} \Big| f(z) - \sum_{j=1}^{n} a_n\, z^n \Big| = \max_{|z|\le r} \Big| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j\, z^j \Big| .$$

Obsérvese que, para r fijo, $\lim_{n\to\infty} A(n,r) = 0$, por convergencia uniforme de la serie de Taylor en $\mathbb{D}(0,r)$. Para una segunda función holomorfa g denotamos los coeficientes de Taylor por b_k y los correspondientes máximos por $N(r)$ y $B(n,r)$.

Para $r \in [0,1)$, todo entero $m \ge 1$ y todo z con $|z| \le r$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\Big| f(z)\,\overline{g(z)} - \sum_{0\le n,k\le m} a_n\, \overline{b_k}\, z^n\, \overline{z}^{\,k} \Big| \\
&\quad\le \Big| f(z) - \sum_{0\le n\le m} a_n\, z^n \Big| \cdot \Big| \sum_{0\le k\le m} b_k z^k \Big| + |f(z)| \cdot \Big| g(z) - \sum_{0\le k\le m} b_k z^k \Big| \\
&\quad\le A(m,r)(N(r) + B(m,r)) + M(r)B(m,r) .
\end{aligned}$$

Esta acotación nos da, en particular, que $\sum_{0\le n,k\le m} a_n\, \overline{a_k}\, r^{n+k}\, e^{\imath(n-k)\theta}$ converge uniformemente a $f(z)\overline{g(z)}$ para $|z| \le r < 1$. ♠

Ejemplo 4.1.2 ***Fórmula de Cauchy y lema de Schwarz.*** *Un argumento adicional para obtener que si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ entonces $|f'(0)| \le 1$.*

Para $0 < r < 1$, y $a \in \mathbb{D}(0,r)$, la fórmula de Cauchy para la derivada nos dice que

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^2}\, dw .$$

Para $a = 0$, nos da que

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w^2}\, dw .$$

Tomando valor absoluto, deducimos que

$$|f'(0)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{|w|^2}\, |dw| = \frac{1}{2\pi r^2} \int_{|w|=r} |f(w)|\, |dw| .$$

Usando ahora que $|f(z)| \le 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, se deduce que

$$|f'(0)| \le \frac{1}{2\pi r^2}\, 2\pi r = \frac{1}{r} .$$

Finalmente, haciendo $r \uparrow 1$, se obtiene que $|f'(0)| \le 1$. ♣

Ejemplo 4.1.3 *Si f es holomorfa en $\mathbb{D}$, $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y f tiene un cero de orden $k \ge 1$ en $z = 0$, entonces*

$$|f(z)| \le |z|^k.$$

Podemos repetir el argumento de la demostración del lema de Schwarz, con $f(z)/z^k$ en lugar de $f(z)/z$. O bien considerar la función $g(z) = f(z)/z^{k-1}$ que tiene una singularidad evitable en $z = 0$, donde, de hecho, tiene un cero de orden 1, y aplicar el lema de Schwarz a g.

Obsérvese que $|f^{(k)}(0)|/k! \leq 1$. ♣

El siguiente es un (útil) cambio de escala en el lema de Schwarz:

Lema 4.4 *Sea f holomorfa en un dominio Ω y sea $a \in \Omega$. Si $f(\Omega) \subset \mathbb{D}(0, M)$ y si $f(a) = 0$, entonces*

$$|f'(a)| \leq \frac{M}{\operatorname{dist}(a, \partial\Omega)}\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $r = \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$. Consideramos la siguiente versión g *local y normalizada* de f dada por $g(z) = f(a + rz)/M$, para $z \in \mathbb{D}$. La función g es holomorfa en $\mathbb{D}$ y cumple las hipótesis del lema de Schwarz, lema 4.1; por tanto, $|g'(0)| \leq 1$. Traduciendo de g a f, concluimos que

$$1 \geq |g'(0)| = r\,|f'(a)|/M\,,$$

lo que da el resultado. ■

El siguiente lema, otra variación más del lema de Schwarz, da cotas precisas de $|f|$ en términos de la posición de los ceros de f.

Lema 4.5 (Lema de Schwarz con ceros) *Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$ con $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Si f se anula en los puntos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de $\mathbb{D}$ entonces*

$$|f(z)| \leq \prod_{j=1}^{n} \left|\frac{z - a_j}{1 - z\overline{a_j}}\right| \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Por cierto, en este lema un punto a puede aparecer repetido digamos k veces entre los a_j significando que f se anula de orden k en ese punto a; en la conclusión el factor $\frac{z-a}{1-z\overline{a}}$ aparecería repetido k veces.

En otras palabras, el lema 4.5 dice que $|f(z)| \leq |B(z)|$, para todo $z \in \mathbb{D}$, donde B es (un) producto de Blaschke finito con ceros $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Obsérvese que el ejemplo 4.1.3 es un caso particular de este lema 4.5.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos el producto de Blaschke B dado por

$$B(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - z\overline{a_j}}\,, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

La función $g(z) = f(z)/B(z)$ es holomorfa en $\mathbb{D}$, por el lema de singularidad evitable.

Supongamos primero que f es holomorfa en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$. Entonces también lo es g. En este caso para $z \in \partial\mathbb{D}$ tenemos que

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|B(z)|} = |f(z)| \leq 1,$$

pues $|B(z)| = 1$ para $z \in \partial\mathbb{D}$ y $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ implicaría por continuidad que $f(\mathrm{cl}(\mathbb{D})) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{D})$. Por el principio del módulo máximo concluimos que $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, lo que traducido a f y B significa que

$$|f(z)| \leq |B(z)|\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,,$$

como se quería ver.

Vamos ahora con la situación general. Para cada $r \in (0,1)$ definimos la función g_r dada por $g_r(z) = g(rz)$. Cada g_r es holomorfa en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$. Denotamos además por $m(r) = \text{mín}_{|z|=r}\{|B(z)|\}$, para $r \in (0,1)$. Obsérvese que, por continuidad, se tiene que $\text{lím}_{r\uparrow 1} m(r) = 1$.

Acotamos: para $z \in \partial\mathbb{D}$ se tiene

$$|g_r(z)| = \frac{|f(rz)|}{|B(rz)|} \leq \frac{|f(rz)|}{m(r)} \leq \frac{1}{m(r)};$$

por tanto, por el principio del módulo máximo, se deduce que

$$|g_r(z)| \leq \frac{1}{m(r)} \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}.$$

Finalmente, si fijamos un $z \in \mathbb{D}$ cualquiera, al hacer $r \uparrow 1$, se deduce que $|g(z)| \leq 1$, pues $\text{lím}_{r\uparrow 1} g_r(z) = g(z)$ y $\text{lím}_{r\uparrow 1} m(r) = 1$. Por consiguiente, para cualquier $z \in \mathbb{D}$ se tiene, como queríamos, $|f(z)| \leq |B(z)|$. ■

EJEMPLO 4.1.4 *Si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y es tal que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, se anula en $z = 0$ y además se anula en los puntos $b_1, b_2, \ldots, b_n$, entonces $|f'(0)| \leq \prod_{j=1}^n |b_j|$*

Ésta es la parte de “derivada en 0” correspondiente del lema 4.5. Algunos de los b_j podrían ser 0, es decir, se permite que 0 sea un cero de orden mayor que 1.

Obsérvese que, por el lema 4.5,

$$|f(z)| \leq |z| \prod_{j=1}^n \Big|\frac{z - b_j}{1 - z\overline{b_j}}\Big| \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Así que

$$|f'(0)| = \lim_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \prod_{j=1}^n |b_j|\,.$$

♣

EJEMPLO 4.1.5 *Deducción del teorema de Liouville («toda función entera y acotada es constante») como corolario del lema de Schwarz.*

Supongamos que f es entera (holomorfa en todo $\mathbb{C}$) y acotada, es decir, para un cierto $0 < M < \infty$, se tiene que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Vamos a comprobar que $f' \equiv 0$ y por tanto que f es constante. Fijemos $a \in \mathbb{C}$ y $R > 0$. Consideremos la función g holomorfa en $\mathbb{D}$ dada por

$$g(z) = \frac{f(a + R\,z) - f(a)}{2M}\,.$$

La función g cumple $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y $g(0) = 0$, así que por el lema de Schwarz, lema 4.1, se tiene que $|g'(0)| \leq 1$, lo que traducido a f significa que

$$|f'(a)| \leq \frac{2M}{R}\,.$$

Esta acotación es válida para todo $R > 0$ y todo $a \in \mathbb{C}$.

Fijando a y haciendo $R \uparrow \infty$ se deduce que $f'(a) = 0$, para todo $a \in \mathbb{C}$. Es decir, $f' \equiv 0$ y, por tanto, f es constante.

Una pequeña variación de este argumento nos permite derivar una ampliación del teorema de Liouville (con menos hipótesis y con la misma conclusión). Pongamos que la función entera f no está, en principio, acotada, pero que sí sabemos que no crece demasiado rápidamente, en el sentido de que la función $M(R)$ dada por

$$M(R) = \max_{|z| \leq R} |f(z)|$$

cumple que

$$(\star) \qquad \lim_{R \to \infty} \frac{M(R)}{R} = 0\,.$$

Bueno, pues con esta condición más débil, también se concluye que f es constante.

Veamos. Como antes, fijamos $a \in \mathbb{C}$ y consideramos

$$z \in \mathbb{D} \mapsto g(z) = \frac{f(a + R\,z) - f(a)}{M\big(|a| + R\big) + |f(a)|}\,.$$

Obsérvese que $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Por el lema de Schwarz aplicado a g obtenemos que

$$1 \geq |g'(0)| = \frac{R\,|f'(a)|}{M\big(|a| + R\big) + |f(a)|}\,.$$

Es decir,

$$|f'(a)| \leq \frac{M\big(|a| + R\big) + |f(a)|}{R} = \frac{M\big(|a| + R\big)}{R} + \frac{|f(a)|}{R}\,.$$

Mantengamos a fijo. Ambos sumandos de la cota de $|f'(a)|$ tienden a 0, cuando $R \to \infty$. Para el segundo sumando de la cota eso es claro; mientras que para el primer sumando la convergencia a 0 se deduce usando $(\star)$ tras escribirlo en la forma

$$\frac{M(|a| + R)}{R} = \frac{M(|a| + R)}{|a| + R}\,\frac{|a| + R}{R}\,.$$

Por tanto, dejando a fijo y haciendo $R \uparrow \infty$ se deduce que $f'(a) = 0$. Como esto es cierto para todo $a \in \mathbb{C}$, se concluye que $f' \equiv 0$ y que f es constante. ♣

4.2. El lema de Schwarz–Pick

El lema de Schwarz–Pick es una versión (generalización) del lema de Schwarz invariante bajo el grupo de transformaciones de Möbius de $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{D}$. Quizás el lector quiera echar un vistazo al apartado 1.9 sobre las trasformaciones de Möbius de $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{D}$.

Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$ con $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. No exigimos $f(0) = 0$ como en el lema de Schwarz.

En general, si queremos estudiar una función holomorfa g cerca de un punto a podemos trasladar el análisis a los alrededores del 0 considerando la función $g(z+a)$, y si queremos normalizar aún más y que la imagen del 0 sea 0, consideraremos $z \mapsto g(z+a) - g(a)$. Son dos cambios de variable lineales, uno en el dominio de definición y otro en la imagen.

Nuestra función f de interés lleva $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$, y querríamos, por ejemplo, estimar la derivada $f'(a)$ en un cierto punto $a \in \mathbb{D}$ que tiene como imagen $f(a) = b$. La idea, como acabamos de indicar sería trasformar f para que lleve 0 en 0 y aplicar el lema de Schwarz. El cambio lineal $z \mapsto f(z+a) - b$, lleva 0 en 0, pero ya no lleva el disco en el disco.

Con transformaciones de Möbius, $\mathcal{M}ob(\mathbb{D})$, sí podemos llevar cualquier punto dado de $\mathbb{D}$ en cualquier otro punto dado de $\mathbb{D}$ de manera biholomorfa, al tiempo que se preserva el disco unidad $\mathbb{D}$.

En lugar de la traslación $z \mapsto z + a$ emplearemos

$$z \mapsto T_a(z) = \frac{z+a}{1+z\overline{a}},$$

y en lugar de la traslación $z \mapsto z - b$ emplearemos

$$z \mapsto S_b(z) = \frac{z-b}{1-z\overline{b}}.$$

Lema 4.6 (Lema de Schwarz–Pick) *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$ y tal que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces*

$$|f'(a)| \le \frac{1-|f(a)|^2}{1-|a|^2} \quad \textit{para todo } a \in \mathbb{D}\,.$$

y, además,

$$\Big|\frac{f(z)-f(a)}{1-f(z)\overline{f(a)}}\Big| \le \Big|\frac{z-a}{1-z\overline{a}}\Big| \quad \textit{para todo } z, a \in \mathbb{D}\,.$$

Es esta una extensión del lema de Schwarz, liberada ya de la hipótesis de la normalización $f(0) = 0$; obsérvese que si tomáramos $a = 0$ y fuera $f(0) = 0$, recuperaríamos el lema de Schwarz usual como caso particular.

demostración. Sea $a \in \mathbb{D}$. Pongamos que $f(a) = b$. Consideremos ahora la función g dada por

$$g = S_b \circ f \circ T_a \,.$$

La función g es holomorfa en $\mathbb{D}$, y cumple que $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y que $g(0) = 0$. Por el lema de Schwarz, tenemos que $|g'(0)| \leq 1$, que traducido en términos de f dice que

$$1 \geq |S_b'(b)|\, |f'(a)|\, |T_a'(0)| = \frac{1}{1-|b|^2}\, |f'(a)|\, (1-|a|^2)\,,$$

como afirma el enunciado.

Asimismo tenemos, por el lema de Schwarz, que

$$|g(w)| = |S_b(f(T_a(w))| \leq |w|\,, \quad \text{para todo } w \in \mathbb{D}\,.$$

Para $z \in \mathbb{D}$, tomamos $w = S_a(z)$, y sustituimos en la expresión anterior, usando que $T_a \circ S_a = \mathrm{id}$, para obtener que

$$|S_b(f(z))| \leq |S_a(z)|\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Lo que, desentrañado, da que

$$\Big|\frac{f(z)-b}{1-f(z)\overline{b}}\Big| \leq \Big|\frac{z-a}{1-z\overline{a}}\Big|\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,,$$

como afirma el enunciado. ■

Las desigualdades en la conclusión del lema de Schwarz–Pick son estrictas salvo en situaciones especiales. De la demostración del lema 4.6 y del análisis de la igualdad del propio lema de Schwarz, se deduce enseguida que:

Lema 4.7 (Igualdad en el lema de Schwarz–Pick) *Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$ con $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.*

Si para un punto $a \in \mathbb{D}$ se tiene que

$$|f'(a)| = \frac{1-|f(a)|^2}{1-|a|^2},$$

entonces f es una transformación de Möbius ($f \in \mathcal{M}ob(\mathbb{D})$).

Asimismo, si para un par de puntos $a, z \in \mathbb{D}$, con $a \neq z$, se tiene que

$$\Big|\frac{f(z)-f(a)}{1-f(z)\overline{f(a)}}\Big| = \Big|\frac{z-a}{1-z\overline{a}}\Big|,$$

entonces f es una transformación de Möbius.

Dejemos constancia del recíproco del lema anterior:

Lema 4.8 *Si $U \in \mathcal{M}ob(\mathbb{D})$ entonces*

$$(\star) \qquad \frac{|U'(a)|}{1-|U(a)|^2} = \frac{1}{1-|a|^2}\,, \quad \textit{para todo } a \in \mathbb{D}\,,$$

y

$$(\star\star) \qquad \Big|\frac{U(a)-U(b)}{1-U(a)\overline{U(b)}}\Big| = \Big|\frac{a-b}{1-a\bar{b}}\Big|, \quad \textit{para todo } a,b \in \mathbb{D}\,.$$

Esto se sigue de aplicar el lema 4.6 a U y a U^{-1}. Ambas $(\star)$ y $(\star\star)$ se pueden obtener alternativa y directamente sin más que apelar a la representación de U que da la proposición 1.10 y un poco de simplificadora álgebra.

Obsérvese que si $(\star\star)$ se escribe

$$\Big|\frac{U(a)-U(b)}{a-b}\Big| = \Big|\frac{1-U(a)\overline{U(b)}}{1-a\bar{b}}\Big|,$$

y se pasa al límite cuando $b \to a$ se obtiene

$$|U'(a)| = \frac{1-|U(a)|^2}{1-|a|^2}\,,$$

que es $(\star)$.

4.2.1. Distancia hiperbólica y derivada hiperbólica

El lema de Schwarz–Pick, lema 4.6 (así como el lema 4.8) sugiere la conveniencia de introducir la cantidad

$$\sigma(a,b) = \Big|\frac{a-b}{1-a\bar{b}}\Big|$$

definida para cada par $a,b \in \mathbb{D}$, y que se conoce como *distancia pseudohiperbólica.* (Hay una distancia hiperbólica, sin pseudo.)

Obsérvese que para todo $a,b \in \mathbb{D}$ se cumple trivialmente que $\sigma(a,b) = \sigma(b,a)$, que $\sigma(a,b) \geq 0$ y, además, $\sigma(a,b) = 0$ si y sólo si $a = b$. La desigualdad triangular también es válida para σ, pero no es obvia. La verificaremos más adelante; aceptémosla.

Con esto tenemos que σ es una distancia en $\mathbb{D}$. Como espacio métrico $(\mathbb{D},\sigma)$ tiene la topología usual (euclídea). Obsérvese que para $a \in \mathbb{D}, r > 0$, la bola $B_\sigma(a,r)$ en la distancia σ es

$$B_\sigma(a,r) = T_a(\mathbb{D}(0,r))\,,$$

y, por tanto, como T_a es transformación de Möbius, tenemos que $B_\sigma(a,r)$ es un disco euclídeo, aunque su centro (euclídeo) no es a y su radio (euclídeo) no es r.

Obsérvese que para todo $a,b \in \mathbb{D}$ se tiene que $\sigma(a,b) < 1$. El diámetro de $\mathbb{D}$ con la distancia σ es 1.

☞ **Nota** 4.2.1. ☜ Podemos extender σ a ser una distancia en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$. Resulta que $\sigma(a,b) = 1$ si a o b son de $\partial\mathbb{D}$. La distancia σ, restringida a $\partial\mathbb{D}$, da distancia 1 entre cualesquiera pares de puntos de $\partial\mathbb{D}$. ♠

El lema de Schwarz–Pick en términos de σ reza así:

Lema 4.9 *Sea f holomorfa $\mathbb{D}$ y tal que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, entonces f es* Lipschitz *con constante* 1 (*contracción*) *para la distancia pseudohiperbólica:*

$$\sigma(f(z), f(a)) \leq \sigma(z, a) \quad \textit{para cualesquiera } z, a \in \mathbb{D}\,.$$

Mientras que el lema 4.8 nos dice que:

Lema 4.10 *Las transformaciones de Möbius de $\mathcal{M}ob(\mathbb{D})$ son* isometrías *para la distancia pseudohiperbólica σ.*

Analicemos un poco más las isometrías de la distancia pseudohiperbólica, es decir, aquellos homeomorfismos H de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ que conservan la distancia pseudohiperbólica:

$$\sigma(H(z), H(w)) = \sigma(z, w), \quad \text{para todo } z, w \in \mathbb{D}\,.$$

Denotemos por $\mathcal{I}so(\mathbb{D})$ al conjunto (grupo bajo composición) de las isometrías bajo σ, y por $\mathcal{I}so^+(\mathbb{D})$ a las isometrías bajo σ que además conservan orientación. El lema anterior nos dice que $\mathcal{M}ob(\mathbb{D})$ es un subgrupo de $\mathcal{I}so(\mathbb{D})$. Asimismo, $\overline{\mathcal{M}ob(\mathbb{D})}$, el conjunto de las trasformaciones de Möbius de $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{D}$ seguidas de conjugación es un subconjunto de $\mathcal{I}so(\mathbb{D})$.

Proposición 4.11

$$\mathcal{I}so(\mathbb{D}) = \mathcal{M}ob(\mathbb{D}) \bigcup \overline{\mathcal{M}ob(\mathbb{D})}.$$

DEMOSTRACIÓN. Ya hemos visto que $\mathcal{I}so(\mathbb{D}) \supset \mathcal{M}ob(\mathbb{D}) \bigcup \overline{\mathcal{M}ob(\mathbb{D})}$.

Sea $U \in \mathcal{I}so(\mathbb{D})$. Tras componer si fuera preciso con una transformación de Möbius podemos suponer, y suponemos, que $U(0) = 0$. Como además, por ser U isometría bajo σ, se tiene que $|U(1/2)| = 1/2$, con un rotación adicional, si fuera preciso, podemos suponer, y suponemos, que $U(1/2) = 1/2$.

Denotemos $\mathbb{D}^+ = \mathbb{D} \cap \{\Im(z) \geq 0\}$ y $\mathbb{D}^- = \mathbb{D} \cap \{\Im(z) \leq 0\}$.

Todo punto $z \in \mathbb{D}^+$ está completamente determinado por sus distancias pseudohiperbólicas a 0 y $1/2$. Además sólo $\overline{z}$ (entre los puntos de todo $\mathbb{D}$) comparte ese mismo par de distancias.

Por tanto, para cada $z \in \mathbb{D}$ se tiene que $U(z) = z$ o $U(z) = \overline{z}$. Ahora, por continuidad, se tiene entonces que $U(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{D}^+$ o $U(z) = \overline{z}$ para todo $z \in \mathbb{D}^-$. Lo mismo sucede para $\mathbb{D}^-$. Como U es biyectiva, no puede ser $U(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{D}^+$ y a la vez $U(z) = \overline{z}$ para todo $z \in D^-$, ni tampoco $U(z) = \overline{z}$ para todo $z \in \mathbb{D}^+$ y a la vez $U(z) = z$ para todo $z \in D^-$. En consecuencia $U(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{D}$, o $U(z) = \overline{z}$ para todo $z \in \mathbb{D}$. ■

Comprobamos ahora que σ satisface la desigualdad triangular y, por tanto, que es una distancia.

Lema 4.12 *σ satisface la desigualdad triangular: para $a, c, b \in \mathbb{D}$ se tiene que*

$$\sigma(a, b) \leq \sigma(a, c) + \sigma(c, b)\,.$$

DEMOSTRACIÓN. La desigualdad afirma que

$$\Big|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\Big| \le \Big|\frac{a-c}{1-\bar{a}c}\Big| + \Big|\frac{c-b}{1-\bar{c}b}\Big|, \quad \text{para cualesquiera } a, c, b \in \mathbb{D}\,.$$

Como las transformaciones de Möbius dejan invariante la distancia σ, podemos suponer que $c = 0$ y que $a \in (0, 1)$. Esto simplifica notablemente la comprobación. (Por eso para probar esta desigualdad triangular hemos esperado a disponer de la propiedad de invariancia de σ bajo $\mathcal{M}ob(\mathbb{D})$) .

Con $c = 0$, todo se reduce a probar que para todo $a, b \in \mathbb{D}$ se tiene que

$$\Big|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\Big| \le |a| + |b|\,.$$

Aprovechando de nuevo la invariancia de σ por $\mathcal{M}ob(\mathbb{D})$, de hecho, por rotaciones alrededor de 0, basta con considerar el caso en que $a = r \in (0, 1)$ y $b = se^{\imath\theta}$, con $s \in (0, 1)$ y $\theta \in [0, \pi]$. (Por simetría no hace falta considerar $\theta \in [-\pi, 0]$.)

La cantidad

$$\Big|\frac{r-se^{\imath\theta}}{1-rse^{\imath\theta}}\Big|^2 = \frac{r^2+s^2-2rs\cos(\theta)}{1+r^2s^2-2rs\cos(\theta)}\,,$$

como función de $\theta \in [0, \pi]$, crece monótonamente

$$\text{desde } \Big(\frac{r-s}{1-rs}\Big)^2 \quad \text{a} \quad \Big(\frac{r+s}{1+rs}\Big)^2.$$

Por tanto, tan sólo hemos de comprobar que

$$\frac{r+s}{1+rs} \le r+s\,,$$

que es obvio. ■

A. Distancia hiperbólica

La *distancia hiperbólica* ρ en $\mathbb{D}$ está definida por la relación:

$$\rho(a,b) = \ln\left(\frac{1+\big|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\big|}{1-\big|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\big|}\right), \quad \text{para cada } a, b \in \mathbb{D}\,.$$

La distancia hiperbólica ρ se escribe (algo más compactamente) en términos de σ (la distancia pseudohipérbólica) como

$$(\star) \quad \rho(a,b) = \ln\Big(\frac{1+\sigma(a,b)}{1-\sigma(a,b)}\Big), \quad \text{para cada } a, b \in \mathbb{D}\,.$$

Y recíprocamente, σ se escribe en términos de ρ:

$$\sigma(a,b) = \tanh\Big(\frac{\rho(a,b)}{2}\Big), \quad \text{para cada } a, b \in \mathbb{D}\,.$$

Si $b = 0$, entonces

$$\rho(a, 0) = \ln\Big(\frac{1+|a|}{1-|a|}\Big)\,, \quad \text{para cada } a \in \mathbb{D}\,.$$

Obsérvese que, para todo $s \geq 0$,

$$B_\rho(0, s) = \mathbb{D}(0, \tanh(s/2))\,,$$

y, en general, que para todo $a \in \mathbb{D}$,

$$B_\rho(a, s) = B_\sigma(a, \tanh(s/2))\,.$$

Obviamente $\rho(a, b)$ es simétrica y no negativa, y además $\rho(a, b) = 0$ si y sólo si $a = b$. Discutimos la desigualdad triangular algo más adelante.

De nuevo, el espacio métrico $(\mathbb{D}, \rho)$ tiene la misma topología que $\mathbb{D}$ con la distancia euclídea. Con la distancia ρ, el disco $\mathbb{D}$ tiene diámetro infinito, mientras que con σ tiene diámetro 1 y con la distancia euclídea tiene diámetro 2.

Como la función real de variable real $\ln((1+x)/(1-x))$, para $x \in [0, 1)$ es monótona (estrictamente) creciente, la relación $(\star)$ entre la distancia pseudohiperbólica σ y la distancia hiperbólica ρ y el lema 4.9 nos da que:

Lema 4.13 *Sea f holomorfa $\mathbb{D}$ y tal que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces f es* Lipschitz *con constante* 1 *(contracción) para la distancia hiperbólica:*

$$\rho(f(a), f(b)) \leq \rho(a, b) \quad \textit{para cualesquiera } a, b \in \mathbb{D}\,,$$

Además, si para un par $a, b \in \mathbb{D}$ con $a \neq b$ se tiene igualdad, entonces f es una transformación de Möbius de $\mathcal{M}ob(\mathbb{D})$.

Y asimismo nos da la siguiente traducción del lema 4.10:

Lema 4.14 *Las transformaciones de Möbius de $\mathcal{M}ob(\mathbb{D})$ son* isometrías *para la distancia hiperbólica ρ. De hecho, las transformaciones de Möbius $\mathcal{M}ob(\mathbb{D})$ son las isometrías de $(\mathbb{D}, \rho)$ que conservan orientación.*

El siguiente lema recoge la comparación local (infinitesimal) entre las distancias euclídea, pseudohiperbólica e hipérbólica:

Lema 4.15 *Para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene que*

$$(1) \quad \lim_{h\to 0} \frac{\rho(z+h, z)}{|z+h-z|} = \frac{2}{1-|z|^2}\,,$$

$$(2) \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sigma(z+h, z)}{|z+h-z|} = \frac{1}{1-|z|^2}\,,$$

$$(3) \quad \lim_{h\to 0} \frac{\rho(z+h, z)}{\sigma(z+h, z)} = 2\,.$$

DEMOSTRACIÓN. (3) se sigue del siguiente límite real:

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x} \ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) = 2\,.$$

(2) se sigue de que si $z+h \in \mathbb{D}$,

$$\frac{\sigma(z+h,z)}{|z+h-z|} = \frac{1}{\big|1-|z|^2-h\overline{z}\big|}\,.$$

Finalmente, (1) se sigue de (2) y (3). ■

Distancia hiperbólica como distancia Riemanniana. La distancia hiperbólica es, como vamos a ver seguidamente, la distancia asociada a la **métrica de Poincaré**.

La métrica de Poincaré es la métrica Riemanniana en el disco unidad $\mathbb{D}$ dada en la notación clásica $ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$ por

$$E(z) = G(z) = \frac{2}{1-|z|^2}\,, \quad F \equiv 0\,.$$

Y, por tanto, en particular, ρ es, en efecto, una distancia. Puesto que para cualquier transformación de Möbius $T \in \mathcal{M}ob(\mathbb{D})$ se tiene para todo $z \in \mathbb{D}$ que

$$\frac{2|T'(z)|}{1-|T(z)|^2} = \frac{2}{1-|z|^2}\,,$$

es claro que, las transformaciones de Möbius son isometrías para la distancia asociada a la métrica de Poincaré.

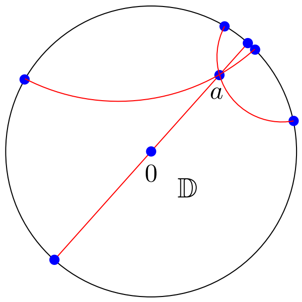
Si $r \in (0,1)$ y $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es una curva (definida en $(0,1)$) que conecta $0 = \gamma(0)$ con r en $\mathbb{D}$, se tiene

$$(\star)\quad \int_0^1 \frac{2\sqrt{(x')^2(t)+(y')^2(t)}}{1-(x^2(t)+y^2(t))}dt \geq \int_0^1 \frac{2\sqrt{(x')^2(t)}}{1-x^2(t)}dt \geq \int_0^1 \frac{2x'(t)}{1-x^2(t)}dt = \ln\Big(\frac{1+r}{1-r}\Big)$$

Denotemos (provisionalmente) por d a la distancia asociada a la métrica de Poincaré. La comparación $(\star)$ nos dice que $d(0,r) = \ln\big((1+r)/(1-r)\big)$, para cualquier $r \in (0,1)$. Como d es invariante por transformaciones de Möbius y dado $a, b \in \mathbb{D}$ existe $T \in \mathcal{M}ob(\mathbb{D})$ y $r \in (0,1)$ tal que $T(0) = a$ y $T(r) = b$ se deduce que

$$d(a,b) = \rho(a,b)\,.$$

Es decir, **la distancia hiperbólica es la distancia asociada a la métrica de Poincaré**.



Dibujo 4.2. GEODÉSICAS DE LA MÉTRICA DE POINCARÉ.

La comparación $(\star)$ nos dice además que los radios $\mathbb{D}$ desde el origen son geodésicas (si se recorren con velocidad 1 en la métrica de Poincaré, es decir, con $\gamma(t) = \tanh(t/2)$, para el radio desde 0 hasta 1). Como las transformaciones de Möbius son isometrías para la métrica de Poincaré, las geodésicas que pasan por un punto cualquier prefijado $a \in \mathbb{D}$, véase el dibujo 4.2 son los arcos de círculo que pasan por a y que son perpendiculares al círculo unidad.

☞ **Nota** 4.2.2. ☜ Si uno quiere que las transformaciones de Möbius, $\mathcal{M}ob(\mathbb{D})$, sean isometrías para una métrica riemanniana en $\mathbb{D}$, y si además exige que esa métrica en 0, por ejemplo, sea un múltiplo de la métrica euclídea, entonces la métrica ha de venir dada por $E = G = c/(1-|z|^2)$ y $F \equiv 0$, para una cierta constante $c > 0$. Se elige $c = 2$ por dos razones: una es que la curvatura de esa métrica así definida es constantemente -1 y la otra es para que la fórmula de la distancia no tenga ningún factor delante del ln. ♠

☞ **Nota** 4.2.3. ☜ La distancia pseudohiperbólica no es la distancia asociada a ninguna métrica riemanniana. ♠

B. Derivada hiperbólica

Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$. La **derivada hiperbólica** $f^{\natural}(z)$ de f en z se define

$$f^{\natural}(z) = \frac{(1-|z|^2)}{2}\,|f'(z)|\,, \quad \text{para cada } z \in \mathbb{D}\,.$$

Obsérvese que en la definición de $f^{\natural}$ hemos puesto valor absoluto en la derivada euclídea; la derivada hiperbólica es pues un número no negativo.

Lema 4.16 *Si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ entonces*

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(z+h)-f(z)|}{\rho(z+h,z)} = f^{\natural}(z)\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Es decir, la derivada hiperbólica $f^\natural(z)$ mide la distorsión (infinitesimal) que produce f cerca de z con la distancia hiperbólica como escala de partida y con la distancia euclídea como escala de llegada.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $z \in \mathbb{D}$. Entonces, por el lema 4.15,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{|f(z+h)-f(z)|}{\rho(z+h,z)} &= \lim_{h\to 0} \frac{|f(z+h)-f(z)|}{|h|} \cdot \frac{|h|}{\rho(z+h,z)} \\ &= |f'(z)| \cdot \frac{1-|z|^2}{2} = f^\natural(z)\,.\end{aligned}$$

■

☞ **Nota** 4.2.4. ☜ La derivada hiperbólica está definida para funciones holomorfas de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{C}$. Visto lo que significa en términos de distorsión infinitesimal debería denominarse quizás derivada hiperbólica-euclídea.

Para funciones holomorfas f de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ tendríamos una derivada hiperbólica-hiperbólica dada por

$$f^\dagger(z) = \frac{(1-|z|^2)|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\,.$$

Para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene

$$f^\dagger(z) = \lim_{h\to 0} \frac{\rho(f(z+h), f(z))}{\rho(z+h,z)}\,.$$

El lema de Schwarz–Pick dice simplemente que $f^\dagger(z) \le 1$ para toda f holomorfa de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ y todo $z \in \mathbb{D}$. Además para $U \in \mathcal{M}ob(\mathbb{D})$ se tiene que $U^\dagger \equiv 1$. ♠

La derivada hiperbólica es invariante bajo la acción de $\mathcal{M}ob(\mathbb{D})$. Esto se sigue de que las trasformaciones de Möbius en $\mathcal{M}ob(\mathbb{D})$ son isometrías para la métrica hiperbólica o bien calculando:

Lema 4.17 *Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$, entonces para toda $T \in \mathcal{M}ob(\mathbb{D})$ se tiene*

$$(f\circ T)^\natural \equiv f^\natural \circ T\,,$$

es decir, para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene que $(f\circ T)^\natural(z) = f^\natural(T(z))$. Asimismo, para cualquier traslación $w \mapsto w+b$ se tiene

$$(f+b)^\natural \equiv f^\natural\,.$$

Obsérvese que para $T \in \mathcal{M}ob(\mathbb{D})$ se tiene que

$$T^\natural(z) = \frac{1-|T(z)|^2}{2}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Obsérvese además que si R es isometría (que conserva orientación) del plano euclídeo en sí mismo, es decir, si para cierto $a \in \mathbb{C}$ con $|a| = 1$ y cierto $b \in \mathbb{C}$, se tiene $R(w) = aw + b$, para todo $w \in \mathbb{C}$, entonces $(R\circ f)^\natural \equiv f^\natural$.

Corolario 4.18 *Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$, entonces*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} f^\natural(z) = \sup_{T\in\mathcal{M}ob(\mathbb{D})} (f\circ T)^\natural(0).$$

En general, los supremos de este corolario no tienen por qué ser finitos, pero si lo fueran, esto significaría que la función f tiene distorsión acotada, de lo hiperbólico en $\mathbb{D}$ a lo euclídeo en $\mathbb{C}$.

El siguiente lema precisa esta observación.

Lema 4.19 *Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$ y B una constante positiva.*

Las siguientes dos condiciones son equivalentes:

1) $\sup_{z\in\mathbb{D}} f^\natural(z) = B < +\infty$.
2) $|f(a) - f(b)| \le B\,\rho(a,b)\,,$ *para todo* $a, b \in \mathbb{D}\,.$

La condición 2) afirma, en otros términos, que f es Lipschitz con constante B entendiendo a f como aplicación del espacio métrico $(\mathbb{D},\rho)$ en el espacio métrico $(\mathbb{C},\text{euclídeo})$.

Compárese esta observación con la de que si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $|f'(z)| \le B$ para todo $z\in\mathbb{D}$, entonces $|f(a)-f(b)| \le B|a-b|$, para todo $a,b\in\mathbb{D}$, y, recíprocamente.

demostración del lema 4.19. La implicación 2) $\Rightarrow$ 1) se sigue directamente del lema 4.16.

Para verificar que 1) implica 2), fijemos $a, b\in\mathbb{D}$. Por invariancia de la derivada hiperbólica bajo la acción de $\mathcal{M}ob(\mathbb{D})$, en el dominio de definición, y bajo las traslaciones, en la imagen, (consúltese el lema 4.17), podemos suponer que $b=0$ y que $f(b)=0$. Así que sólo resta probar que

$$|f(a)| \le B\ln\Big(\frac{1+|a|}{1-|a|}\Big)\,.$$

Ahora, por hipótesis,

$$|f'(z)| \le \frac{2B}{1-|z|^2}\,,\qquad \text{para todo } z\in\mathbb{D}\,.$$

Como $f(0)=0$, podemos escribir

$$f(a) = \int_0^1 a f'(ta)\,dt$$

para acotar

$$|f(a)| \le \int_0^1 |a||f'(ta)|dt \le \int_0^1 |a|\frac{2B}{1-t^2|a|^2}dt = B\ln\Big(\frac{1+|a|}{1-|a|}\Big)\,. \qquad \blacksquare$$

4.3. Subordinación

Desarrollamos ahora una aplicación (a la vez que extensión) del lema de Schwarz, que se conoce como **principio de subordinación** de Littlewood.

Definición 4.1 Sean f, g funciones holomorfas en $\mathbb{D}$. Se dice que f **está subordinada** a g si existe ω holomorfa en $\mathbb{D}$, con $\omega(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y $\omega(0) = 0$ tal que $f = g \circ \omega$. Se denota $f \prec g$. A la función ω se le conoce como **subordinador**.

La función ω cumple justamente las hipótesis del lema de Schwarz.

Proposición 4.20 (Principio de subordinación.) *Si f, g son holomorfas en $\mathbb{D}$ y $f \prec g$, entonces*

$$|f'(0)| \leq |g'(0)|$$

y

$$f(\mathbb{D}(0,r)) \subset g(\mathbb{D}(0,r))\,, \quad \textit{para cada } r \in (0,1).$$

DEMOSTRACIÓN. El resultado se sigue de aplicar a ω el lema de Schwarz, pues

$$|f'(0)| = |g'(0)||\omega'(0)| \leq |g'(0)|\,,$$

y, para cualquier $r \in (0,1)$,

$$f(\mathbb{D}(0,r)) = g(\omega(\mathbb{D}(0,r)) \subset g(\mathbb{D}(0,r))\,.$$

■

De esta demostración, y del caso de igualdad en el lema de Schwarz, se deduce que si $f \prec g$ y $|f'(0)| = |g'(0)|$, entonces, para algún $\theta \in \mathbb{R}$ y para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene que $f(z) = g(e^{\imath\theta} z)$, es decir, f es un rotación alrededor del origen seguida de g.

Disponemos además una versión invariante del principio de subordinación (que ya no requiere la hipótesis $f(0) = g(0)$). Denotamos por $B_\rho(a, r)$ la bola de centro a y radio r en la distancia hiperbólica.

Corolario 4.21 (Versión invariante del principio de subordinación) *Sea g holomorfa en $\mathbb{D}$, ω holomorfa en $\mathbb{D}$ con $\omega(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y sea f la función (holomorfa en $\mathbb{D}$) dada por $f \equiv g \circ \omega$.*

Para todo $z \in \mathbb{D}$ y todo $r > 0$, se tiene

$$f(B_\rho(z,r)) \subset g(B_\rho(\omega(z), r))\,.$$

Además,

$$f^\natural(z) \leq g^\natural(\omega(z))\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Obsérvese, insistimos, que en este corolario no se supone (y no se necesita) que $\omega(0) = 0$. El corolario se deduce directamente del principio de subordinación y del lema 4.9.

4.3.1. Subordinación y dominios simplementes conexos

Supongamos que Ω es un dominio en $\mathbb{C}$, y que existe una aplicación biholomorfa F de $\mathbb{D}$ sobre Ω. Como F es, en particular, un homeomorfismo de $\mathbb{D}$ sobre Ω, un tal Ω es necesariamente un dominio simplemente conexo. El teorema de la aplicación de Riemann, que discutiremos más adelante, afirma que, recíprocamente, todo dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$ (salvo el propio $\mathbb{C}$) es biholomorfo con $\mathbb{D}$.

En las aplicaciones que vamos a discutir a continuación tendremos dominios Ω simplemente conexos y aplicaciones biholomorfas explícitas F de $\mathbb{D}$ sobre Ω, y no apelaremos al teorema de la aplicación de Riemann.

Proposición 4.22 (Subordinación y dominios simplemente conexos) *Sea F una aplicación biholomorfa de $\mathbb{D}$ sobre un dominio (simplemente conexo) Ω. Sea f cualquier función holomorfa en $\mathbb{D}$ con $f(\mathbb{D}) \subset \Omega$.*

Para cada $z \in \mathbb{D}$ se tiene que

$$(1-|z|^2)|f'(z)| \le (1-|w|^2)|F'(w)|,$$

donde $w \in \mathbb{D}$ viene dado por $f(z) = F(w)$, es decir, $w = F^{-1}(f(z))$. Equivalentemente,

$$f^{\natural}(z) \le F^{\natural}(w)\,.$$

Si además, $f(0) = F(0)$, entonces

$$f(\mathbb{D}(0,r)) \subset F(\mathbb{D}(0,r)), \quad \textit{para todo } 0 \le r < 1\,.$$

Este resultado nos dice que la aplicación biholomorfa de $\mathbb{D}$ en Ω es, en el sentido descrito, la más grande entre las aplicaciones holomorfas de $\mathbb{D}$ en Ω.

Obsérvese que el lema de Schwarz es el caso particular $\Omega = \mathbb{D}$ y $F \equiv id_{\mathbb{D}}$.

DEMOSTRACIÓN. Como $f(\mathbb{D}) \subset \Omega = F(\mathbb{D})$, tenemos que $f = F \circ \omega$, donde $\omega = F^{-1} \circ f$. La función ω es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $\omega(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Así que la versión invariante del principio de subordinación, corolario 4.21, nos da directamente la cota de las derivadas hiperbólicas.

Si además $f(0) = F(0)$ entonces $\omega(0) = 0$, el principio de subordinación, proposición 4.20 nos da que $f(\mathbb{D}(0,r)) \subset F(\mathbb{D}(0,r))$, para todo $0 \le r < 1$. ■

Funciones holomorfas con parte real positiva

Vamos ahora a aplicar las ideas anteriores al caso en que el dominio simplemente conexo que nos interesa es $\mathbb{H}$, el semiplano de la derecha. Las funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ tales que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{H}$ son justamente las funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ cuya parte real es una función positiva.

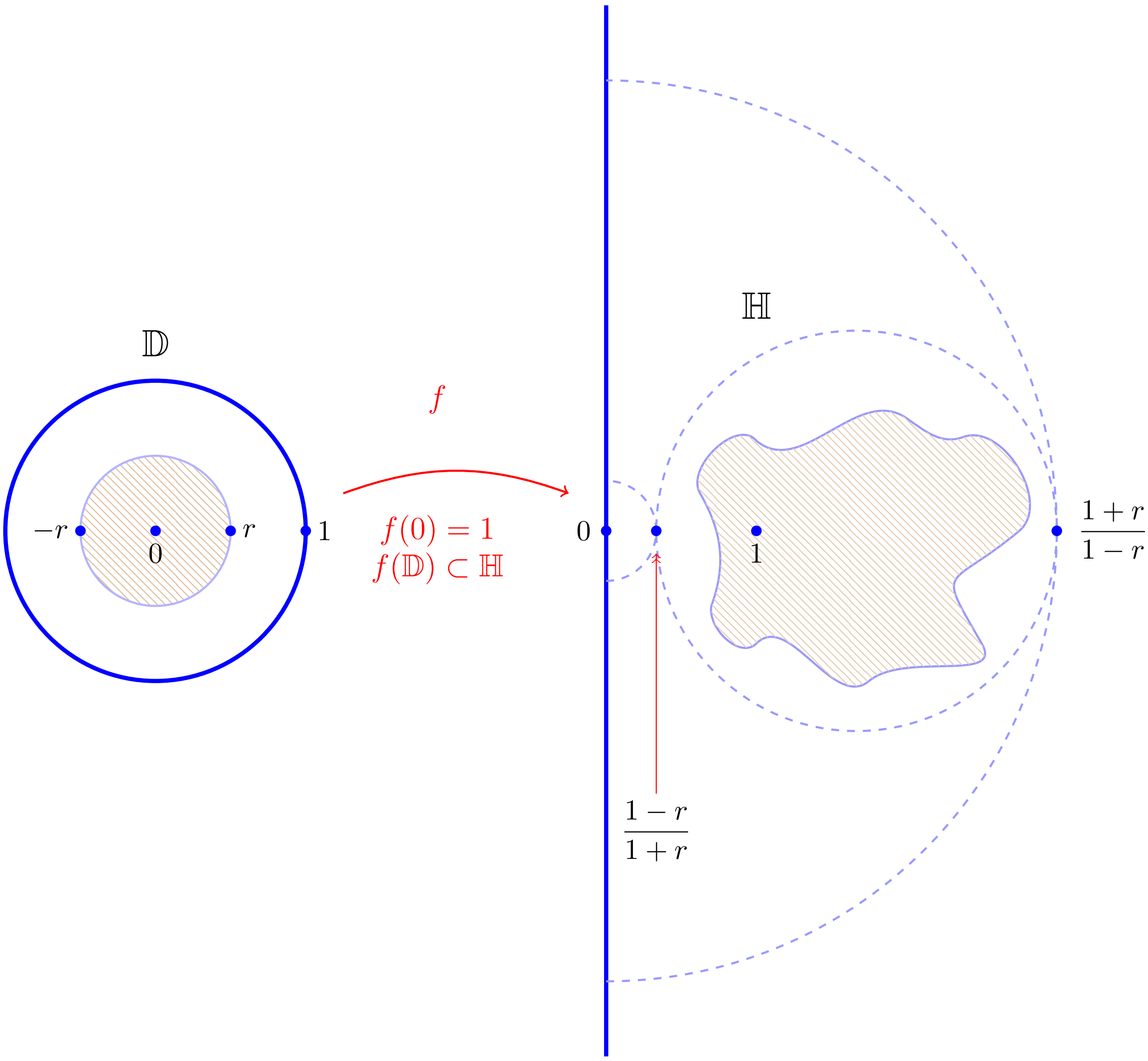
Lema 4.23 *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$ con $\Re f(z) > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Entonces se cumple que*

$$|f'(z)|(1-|z|^2) \le 2\, \Re f(z)\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Si además, $f(0) = 1$*, entonces*

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \le |f(z)| \le \frac{1+|z|}{1-|z|}\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

En particular, $|f'(0)| \le 2$ y $f^\natural(z) \le \Re f(z)$, para todo $z \in \mathbb{D}$.



Dibujo 4.3. Subordinación; semiplano derecho.

Analizamos primero la segunda conclusión, así que suponemos que $f(0) = 1$.

La función F dada por $F(z) = \frac{1+z}{1-z}$ es una transformación de Möbius que lleva biholomorfamente el disco unidad $\mathbb{D}$ sobre el semiplano derecho $\mathbb{H}$; nótese que $F(0) = 1$.

Así que si $f(0) = 1 = F(0)$ entonces, por la proposición 4.22, tenemos que

$$f(\mathbb{D}(0,r)) \subset F(\mathbb{D}(0,r))\,, \quad \text{para todo } r \in [0,1)\,.$$

Analicemos, quien es $F(\mathbb{D}(0,r))$, para un $0 < r < 1$, fijo. La transformación de Möbius F lleva $\mathbb{D}(0,r)$ en un cierto disco. Como F lleva el eje real sobre sí mismo y $\partial\mathbb{D}(0,r)$ ha de cortar ortogonalmente a $\mathbb{R}$, se tiene que $F(\mathbb{D}(0,r))$ es el disco con centro en el eje real (positivo) que pasa por los puntos $(1+r)/(1-r) = F(r)$ y $(1-r)/(1+r) = F(-r)$; el centro de este disco $F(\mathbb{D}(0,r))$ es, por supuesto, $(1+r^2)/(1-r^2)$ y no $1 = F(0)$.

Este disco, $F(\mathbb{D}(0,r))$, está, por tanto, contenido en el anillo A_r dado por

$$A_r = \Big\{ w : \frac{1-r}{1+r} < |w| < \frac{1+r}{1-r} \Big\}\,.$$

Por tanto, $f(\mathbb{D}(0,r)) \subset A_r$, es decir,

$$\frac{1-r}{1+r} < |f(z)| < \frac{1+r}{1-r}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}(0,r)\,.$$

Para rematar,[1] si $z \in \mathbb{D}$, entonces para todo $|z| < r < 1$ se tiene que $z \in \mathbb{D}(0,r)$ y, por tanto, $(1-r)/(1+r) < |f(z)| < (1+r)/(1-r)$. Haciendo $r \downarrow |z|$, se deduce, como queríamos, que $(1-|z|)/(1+|z|) \le |f(z)| \le (1+|z|)/(1-|z|)$.

Respecto de la primera conclusión: se comprueba directamente que para la función F se cumple que

$$(1-|w|^2)|F'(w)| = 2\, \Re F(w)\,, \quad \text{para todo } w \in \mathbb{D}\,.$$

La cota para la derivada en la subordinación invariante, corolario 4.21, nos da que si $f(z) = F(w)$ entonces

$$|f'(z)|(1-|z|^2) \le |F'(w)|(1-|w|^2) = 2\Re F(w) = 2\Re f(z)\,,$$

es decir,

$$|f'(z)|(1-|z|^2) \le 2\Re f(z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,. \qquad \blacksquare$$

Como ilustración del lema 4.23:

EJEMPLO 4.3.1 *Desigualdad de Harnack para funciones armónicas positivas.*

Supongamos que u es una función armónica positiva en $\mathbb{D}$. Consideramos la función $f = u + \imath v$ holomorfa en $\mathbb{D}$, donde v es la armónica conjugada de u. Como $|\nabla u| \equiv |f'|$ y $\Re f \equiv u$, se tiene, por el lema 4.23, que

$$\frac{|\nabla u(z)|}{u(z)} \le \frac{2}{1-|z|^2}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

que se conoce, en ambientes selectos, como **desigualdad de Harnack**. ♣

[1] ¡Qué violencia!

Funciones holomorfas con parte imaginaria acotada

Consideramos ahora funciones f holomorfas en $\mathbb{D}$ tales que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{B}$, donde $\mathbb{B}$ es la banda $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |\Im(z)| < 1\}$. Las funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ tales que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{B}$ son justamente las funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ cuya parte imaginaria tiene módulo acotado en valor absoluto por 1.

Lema 4.24 *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$, tal que $|\Im f(z)| \le 1$. Entonces*

$$(1-|z|^2)|f'(z)| \le \frac{4}{\pi}\cos\Big(\frac{\pi}{2}\Im f(z)\Big), \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Si además $f(0)=0$, entonces

$$|\Re f(z)| \le \frac{2}{\pi}\ln\Big(\frac{1+|z|}{1-|z|}\Big), \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Obsérvese que

$$f^{\natural}(z) \le \frac{2}{\pi}\cos\Big(\frac{\pi}{2}\Im f(z)\Big), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Si en lugar de cota 1 para $|\Im F|$ tuviéramos cota, digamos M, aplicaríamos el enunciado a f/M.

Podemos aplicar la proposición 4.22 considerando la función F definida en $\mathbb{D}$ por

$$F(z) = \frac{2}{\pi}\ln\Big(\frac{1+z}{1-z}\Big)\,.$$

La función F es biholomorfa de $\mathbb{D}$ sobre la banda B y además $F(0)=0$.

☞ **Nota** 4.3.1. ☜ Obsérvese que la aplicación Ln definida en $\mathbb{H}$ y tal que a $w = re^{\imath\theta}$, con $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, le asocia

$$\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Ln}(w) = \frac{2}{\pi}\ln(r) + \frac{2\imath\theta}{\pi}\,,$$

es biholomorfa de $\mathbb{H}$ sobre B. ♠

Las conclusiones del enunciado se obtendrían tras verificar (un tanto laboriosamente) que

$$(1-|z|^2)|F'(z)| = \frac{4}{\pi}\cos\Big(\frac{\pi}{2}\Im F(z)\Big), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

y que

$$F\big(\mathbb{D}(0,r)\big) \subset \Big\{w \in \mathbb{C} : |\Re w| \le \frac{2}{\pi}\ln\Big(\frac{1+r}{1-r}\Big)\Big\}, \quad \text{para todo } 0 \le r < 1\,.$$

Es quizás un poco más transparente proceder como sigue. Observemos, primero, que como $f(\mathbb{D}) \subset B$, entonces la función g (asimismo holomorfa en $\mathbb{D}$) dada por

$$g = e^{(\pi/2)f}\,,$$

verifica que $\Re g(z) > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Apliquemos ahora el lema 4.23 sobre funciones holomorfas con parte real positiva para concluir que

$$(1-|z|^2)|g'(z)| \le 2\Re g(z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,,$$

que traducido a f dice que

$$(1-|z|^2)\,\frac{\pi}{2}\,|f'(z)|\,|g(z)| \le 2|g(z)|\,\cos\Big(\frac{\pi}{2}\Im f(z)\Big)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,,$$

es decir,

$$(1-|z|^2)\,|f'(z)| \le \frac{4}{\pi}\cos\Big(\frac{\pi}{2}\Im f(z)\Big)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Si además $f(0)=0$ entonces $g(0)=1$ y, de nuevo por el ejemplo 4.23, se tiene que

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \le |g(z)| \le \frac{1+|z|}{1-|z|}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Como $|g| \equiv e^{(\pi/2)\Re f}$, se deduce que

$$|\Re f(z)| \le \frac{2}{\pi}\ln\Big(\frac{1+|z|}{1-|z|}\Big)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

♣

4.3.2. Funciones holomorfas acotadas que no se anulan

Tratamos en este apartado una aplicación de la subordinación a la clase de funciones holomorfas del título. Le reservamos todo un apartado porque la conclusión que obtendremos será crucial en la derivación del teorema de Bloch y de ahí, el teorema de Picard, que es el objetivo último de todo este capítulo.

Proposición 4.25 *Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$ y tal que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}\setminus\{0\}$, entonces*

$$(1-|z|^2)|f'(z)| \le 2|f(z)|\ln\Big(\frac{1}{|f(z)|}\Big) \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

En particular,

$$|f'(0)| \le 2|f(0)|\ln\Big(\frac{1}{|f(0)|}\Big)\,.$$

Si $|f|$ estuviera acotada por, digamos M, en lugar de por 1 como en el enunciado, aplicamos la proposición a la función f/M para obtener que

$$|f'(0)| \le 2|f(0)|\ln\Big(\frac{M}{|f(0)|}\Big)\,.$$

Podemos leer en pasiva[2] la proposición 4.25. Diría lo siguiente: supongamos que f holomorfa en $\mathbb{D}$ con $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ es tal que

$$|f'(0)| > 2|f(0)|\ln\Big(\frac{1}{|f(0)|}\Big)\,,$$

[2] Contrarecíproco, si lo prefiere el lector. En su derecho está.

entonces f se ha de anular en $\mathbb{D}$. Así que si $|f'(0)|$ es grande (en términos de $|f(0)|$), entonces f se tiene que anular. Esta observación de aspecto tan particular y banal nos será de mucha utilidad más adelante.

DEMOSTRACIÓN. Ahora no disponemos de F biholomorfa de $\mathbb{D}$ sobre el dominio de interés, $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, puesto que este dominio no es simplemente conexo.

Procedemos como sigue.

Como la función f no se anula y $\mathbb{D}$ es simplemente conexo, podemos tomar un logaritmo holomorfo de f, es decir, una función g holomorfa en $\mathbb{D}$ tal que $f \equiv e^g$.

Como $|f| \equiv e^{\Re g}$ y $|f(z)| < 1$, para todo $z \in \mathbb{D}$, tenemos que $\Re g(z) < 0$, para todo $z \in \mathbb{D}$.

Aplicamos ahora el resultado de subordinación del lema 4.23 a la función $-g$, que tiene parte real positiva, para deducir que

$$(1 - |z|^2)|g'(z)| \le -2\Re g(z) = 2|\Re g(z)|\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,,$$

lo que traducido a f da el resultado. ■

Analicemos con detalle la precisión de las cotas de esta proposición. La función F dada por

$$F(z) = \exp\Big(- \frac{1+z}{1-z}\Big)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,,$$

verifica

$$(1 - |z|^2)|F'(z)| = 2\,|F(z)| \ln\Big(\frac{1}{|F(z)|}\Big)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Así que la cota general de la derivada de la proposición no se puede mejorar.

Esta función F cumple que $F(0) = 1/e$, un punto específico de $\mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Fijemos un valor $t \in (0,1)$ y denotemos (por abreviar) con $\mathcal{F}_t$ a la clase de funciones f holomorfas en $\mathbb{D}$ tales que $|f(0)| = t$. Nos preguntamos por la mejor cota de $|f'(0)|$ para las funciones $f \in \mathcal{F}_t$, es decir, planteamos determinar

$$M_t = \sup_{f \in \mathcal{F}_t} |f'(0)|\,.$$

Ya sabemos, proposición 4.25, que $M_t \le 2t\ln(1/t)$, para todo $t \in (0,1)$. La función F anterior nos dice, en este contexto, que $M_{1/e} = |F'(0)| = 2/e$ y que el supremo en realidad es un máximo.

Consideremos la función F_t dada por

$$F_t(z) = \exp\Big(- \Big(\ln\frac{1}{t}\Big)\frac{1+z}{1-z}\Big)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Se comprueba fácilmente que $F_t \in \mathcal{F}_t$ y que

$$|F_t'(0)| = 2t\ln(1/t)\,,$$

Así que

$$M_t = 2t\ln(1/t)\,, \quad \text{para todo } t \in (0,1)\,.$$

De nuevo, para todo $t \in (0,1)$ el supremo que define M_t es un máximo.

4.4. Teorema de cubrimiento de Landau

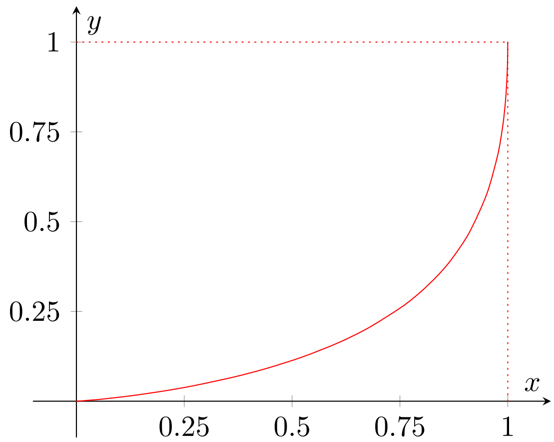
Introducimos la función real μ definida en $[0,1]$ por

$$r \in (0,1) \mapsto \mu(r) = \frac{2r\ln(1/r)}{1-r^2}\,.$$

La función μ es creciente, y extendida definiendo $\mu(0) = 0$ y $\mu(1) = 1$, da un homeomorfismo de $[0,1]$ sobre $[0,1]$. Denotamos el homeomorfismo inverso de μ por $\eta\colon [0,1] \to [0,1]$. El dibujo 4.4 recoge la gráfica de la función η.

Nótese que $\mu(e^{-t}) = t/\operatorname{senh}(t)$, para cada $t > 0$.

Obsérvese que $\mu(r) \leq 2\sqrt{r}$, para todo $r \in [0,1]$, y que, por tanto, $\eta(s) \geq (s^2/4)$, para todo $s \in [0,1]$. Esta acotación de μ (y la correspondiente de η) es simplemente cómoda: si $0 < \delta < 1$, se tiene asimismo $\mu(r) \leq C_\delta\, r^\delta$, para todo $r \in [0,1]$.



Dibujo 4.4. Función η.

Teorema 4.26 (Teorema de cubrimiento de Landau) *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$ tal que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y $f(0) = 0$. Entonces*

$$f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}\big(0, \eta\big(|f'(0)|\big)\big)\,.$$

En particular,

$$f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}\big(0, |f'(0)|^2/4\big)\,.$$

La segunda relación de contenido del enunciado se sigue de la primera y de la estimación inferior de η de más arriba, a saber, $\eta(s) \geq s^2/4$, para $s \in (0,1)$. Este segundo contenido es una formulación simplificada y más manejable que basta para las aplicaciones que tenemos en mente.

Este teorema de cubrimiento de Landau interpola en cierto sentido entre (una consecuencia directa del principio de) la aplicación abierta y el caso de igualdad del lema de Schwarz. Veamos.

- Si f es holomorfa en $\mathbb{D}$, $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y $|f'(0)| > 0$, el teorema de la aplicación abierta nos dice que $f(\mathbb{D})$ es un abierto en $\mathbb{C}$ y, en particular, que existe $r > 0$ tal que $\mathbb{D}(f(0), r) \subset f(\mathbb{D})$. La hipótesis $|f'(0)| > 0$ tan sólo se usa para garantizar que f no es constante. El teorema de cubrimiento de Landau nos dice que podemos cuantificar y poner $r = \eta(|f'(0)|) > 0$.
- Obsérvese que las hipótesis del teorema son las mismas que las del lema de Schwarz. El caso de igualdad del lema de Schwarz afirma en particular que para tales f si $|f'(0)| = 1$ entonces $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, pues f es una rotación. Este teorema nos dice que si $|f'(0)|$ es próximo a 1, entonces$f(\mathbb{D})$ contiene un disco centrado en 0 de radio próximo a 1.

Por cierto, sin apelar directamente a la función η, el teorema dice que si escribimos

$$|f'(0)| = t/\operatorname{senh}(t)\,,$$

para un cierto $t > 0$, entonces

$$f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}(0, e^{-t})\,.$$

La primera inclusión del teorema 4.26 no se puede mejorar, en el sentido de que dado $t \in (0,1)$ existe f holomorfa en $\mathbb{D}$, con $f(0) = 0$ y tal que $|f'(0)| = \mu(t)$ y $\operatorname{dist}\big(0, \partial f(\mathbb{D})\big) = t$. Analizaremos esta optimalidad tras la demostración.

DEMOSTRACIÓN. Basta ver que si $w \in \mathbb{D} \setminus f(\mathbb{D})$ entonces $\mu(|w|) \geq |f'(0)|$. Porque entonces los $w \in \mathbb{D} \setminus f(\mathbb{D})$ cumplen todos $|w| \geq \eta(|f'(0)|)$.

La clave de la demostración radica en intercambiar mediante una transformación de Möbius los papeles de w y 0 para a continuación apelar a la proposición 4.25.

Consideremos la función $g = S_w \circ f$. La función g es holomorfa en $\mathbb{D}$. La función g no se anula en $\mathbb{D}$, puesto que f no toma el valor w. Además, $g(0) = -w$.

Como $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}$, se deduce de la proposición 4.25 que

$$|g'(0)| \leq 2|g(0)| \ln(1/|g(0)|)\,.$$

Si ahora traducimos y expresamos esta desigualdad directamente en términos de f, se obtiene que

$$(1 - |w|^2)|f'(0)| = |S'_w(0)||f'(0)| \leq 2|w| \ln(1/|w|)\,,$$

es decir,

$$|f'(0)| \leq \mu(|w|)\,,$$

como queríamos ver. ■

demostración de que el teorema 4.26 es el mejor posible. Para comprobar esta optimalidad combinamos la propia demostración del teorema 4.26 con el hecho de que la cota de la proposición 4.25 es óptima.

Recordemos para $t \in (0,1)$ la función holomorfa F_t en $\mathbb{D}$ dada por

$$F_t(z) = \exp\Big(- \ln(1/t) \cdot \frac{1+z}{1-z}\Big), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

La función F_t no se anula, de hecho $F_t(\mathbb{D}) = \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Además $F_t(0) = t$ y

$$|F_t'(0)| = 2|F_t(0)| \ln(1/|F_t(0)|) = 2t \ln(1/t)\,.$$

Sea ahora $f_t = S_t \circ F_t$, donde S_t es la transformación de Möbius: $S_t(z) = (z - t)/(1 - zt)$. (Recuerde, lector, que $t \in \mathbb{R}$.)

La imagen de $\mathbb{D}$ por f_t es $f_t(\mathbb{D}) = \mathbb{D} \setminus \{-t\}$ y además $f_t(0) = 0$. Finalmente,

$$|f_t'(0)| = \frac{1}{1-t^2}|g_t'(0)| = \frac{1}{1-t^2} 2t\ln(1/t) = \mu(t)\,,$$

es decir,

$$\operatorname{dist}(0, \partial f_t(\mathbb{D})) = t = \eta\big(|f_t'(0)\big)\,. \qquad \blacksquare$$

En lugar de la hipótesis normalizadora de que la función f está acotado en módulo por 1, y expresar la relación de contenido de la conclusión en términos de $|f'(0)|$, podemos normalizar alternativamente suponiendo que $|f'(0)| = 1$ para dar, como sigue, la conclusión en términos de la cota de $|f|$.

Corolario 4.27 *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$, tal que $f(0) = 0$ y $|f'(0)| = 1$ y tal que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}(0, R)$, para un cierto $R \geq 1$. Entonces*

$$f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}\big(0, R\,\eta(1/R)\big) \supset \mathbb{D}\Big(0, \frac{1}{4R}\Big)\,.$$

Obsérvese que el lema de Schwarz nos da de antemano que $R \geq 1$.

demostración. Basta aplicar el teorema 4.26 a la función g en $\mathbb{D}$ dada por $g(z) = f(z)/R$, para todo $z \in \mathbb{D}$. $\blacksquare$

4.4.1. Demostración alternativa del teorema de cubrimiento de Landau.

El teorema 4.26 afirma que para una f como la de su enunciado, la ecuación $f(z) = w$ tiene solución en $z \in \mathbb{D}$ para cada w con $|w| < \eta(|f'(0)|)$. Vamos a desarrollar a continuación una demostración alternativa de una versión no tan precisa, en la que se apela al teorema de Rouché y a que cerca de $z = 0$ la función f ha de ser próxima a $f'(0)z$.

Lema 4.28 *Sea f holomorfa en* $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ *y tal que* $f(0)=0$*. Si f es tal que*

$$|f(z)| \geq 1\,, \quad \textit{para todo } z \textit{ tal que } |z|=1\,,$$

entonces $f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}$*.*

DEMOSTRACIÓN. El lema afirma que si $|w|<1$ entonces la ecuación $f(z)-w=0$ tiene solución para un $z \in \mathbb{D}$. Aplicamos el teorema de Rouché a las funciones f, dada, y $g \equiv f-w$, con $w \in \mathbb{D}$ dado. Si $|z|=1$, entonces

$$|f(z)-g(z)| = |w| < 1 \leq |f(z)|\,.$$

Por tanto, por el teorema de Rouché, f y g tienen el mismo número de ceros en $\mathbb{D}$, y como $f(0)=0$, se deduce que g se anula al menos una vez, es decir, que $f(z)=w$ para algún $z \in \mathbb{D}$, que es lo que se quería demostrar. ■

☞ **Nota** 4.4.1. ☜ Podríamos haber apelado al principio del argumento directamente, sin pasar por el teorema de Rouché. Hubiera sido más natural. ♠

☞ **Nota** 4.4.2. ☜ Sobre la hipótesis $f(0)=0$ en 4.28, manteniendo el resto de las hipótesis.

- Basta con que $|f(0)|<1$. Pongamos $f(0)=a$ y consideremos $g=S_a \circ f$. La función g cumple las hipótesis del lema 4.28, así que $f(\mathbb{D})=g(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}$.
- Es falso si $|f(0)|>1$. Sea $t>1$, real. Sea f dada por $f(z)=(t-1)z+t$. Se tiene que $f(0)=t$ y que $f(\mathrm{cl}(\mathbb{D}))$ es el disco cerrado con centro t y radio $t-1$.
- ¿Qué pasaría, lector, si $|f(0)|=1$?

♠

Corolario 4.29 *Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$, tal que $f(0)=0$ y tal que para un cierto $0<r<1$ y un $s>0$ se tiene que*

$$|f(z)| \geq s\,, \quad \textit{para todo } z \textit{ con } |z|=r\,.$$

Entonces

$$f(\mathbb{D}(0,r)) \supset \mathbb{D}(0,s)\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Considérese la función g dada por $g(z)=f(rz)/s$, para $z \in \mathbb{D}$, y aplíquese el lema 4.28. ■

DEMOSTRACIÓN ALTERNATIVA DE UNA VERSIÓN DÉBIL DEL TEOREMA 4.26. Tenemos f holomorfa en $\mathbb{D}$, con $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y $f(0)=0$. Queremos probar que $f(\mathbb{D})$ contiene un disco alrededor de 0 de cierto radio cuantificable. La idea es que cerca de $z=0$ la función $f(z)$ se parece a $f'(0)\,z$, de forma que debemos estar en situación de aplicar el corolario 4.29 con r y s adecuados.

Aspiramos a comprobar que

$$f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}(0, |f'(0)|^2/6)\,.$$

Vamos con la tarea de precisar esa idea. Podemos suponer y suponemos que $f'(0)$ es real y no negativa (si no, considérese $z \mapsto f(e^{\imath\theta} z)$ para un θ adecuado). Denotemos $\alpha = f'(0)$; nótese que $\alpha \in [0,1]$ (si $\alpha = 1$ entonces $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, por el caso de igualdad del lema de Schwarz). Fijemos $r \in (0,1)$ que luego *optimizaremos*.

Pongamos que el desarrollo de f en serie de potencias alrededor de 0 es

$$f(z) = \alpha z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j\, z^j\,.$$

Recuérdese que, por aquella ampliación del lema de Schwarz que se discutió en el ejemplo 4.1.1, se tiene que

$$\alpha^2 + \sum_{j=2}^{\infty} |a_j|^2 \le 1\,.$$

En particular, $|a_j| \le 1$, para todo $j \ge 2$.

Para $|z| = r$, se cumple entonces que

$$\Big|\sum_{j=2}^{\infty} a_j\, z^j\Big| \le \sum_{j=2}^{\infty} |a_j|\, r^j \le \sum_{j=2}^{\infty} r^j = \frac{r^2}{1-r}\,,$$

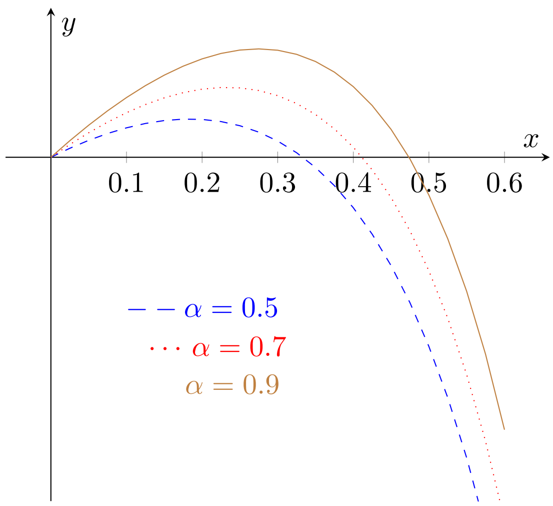
de donde si $|z| = r$, se tiene

$$(\star) \quad |f(z)| \ge \alpha r - \sum_{j=2}^{\infty} r^j = \alpha r - \frac{r^2}{1-r}\,,$$

Para cada valor de $\alpha \in (0,1)$ la función real h_α definida en $[0,1)$ y dada por

$$h_\alpha(t) = \alpha t - t^2/(1-t) \qquad \text{para } t \in [0,1)$$

vale 0 en $t = 0$, es positiva en el intervalo $\big((0, \alpha/(1+\alpha)\big)$ y tiende a $-\infty$ cuando $t \uparrow 1$. La función h_α tiene un valor máximo que denotamos por $m(\alpha)$ (de expresión complicada). Obsérvese en cualquier caso que $h_\alpha(\alpha/3) \ge \alpha^2/6$, así que $m(\alpha) \ge \alpha^2/6$.



Dibujo 4.5. FUNCIÓN h_α.

El corolario 4.29 combinado con ($\star$) nos da que

$$f(\mathbb{D}(0,r)) \supset \mathbb{D}(0, h_\alpha(r))\,, \quad \text{para cada } r \in (0,1)\,,$$

de manera que

$$f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}(0, h_\alpha(r))\,, \quad \text{para cada } r \in (0,1)\,,$$

y, por tanto,

$$f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}(0, m(\alpha))\,,$$

de donde

$$f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}(0, \alpha^2/6) = \mathbb{D}(0, |f'(0)|^2/6)\,.$$

como se quería demostrar. ■

☞ **Nota** 4.4.3. ☜ En la demostración anterior, se obtiene en realidad $f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}(0, m(\alpha))$, que se ha desechado en favor de $f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}(0, \alpha^2/6)$. Una vez que no tenemos el óptimo $f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}(0, \eta(f'(0)))$ y que el radio del disco contenido se expresa en la forma $\lambda |f'(0)|^2$, da igual, en la práctica, tener $\lambda = 1/4$ o $\lambda = 1/6$.

Nótese además que en lugar de ($\star$) podíamos haber usado que

$$|f(z)| \geq \alpha|z| - |z|^2/\sqrt{1-|z|^2},$$

que se obtiene aplicando la desigualdad de Cauchy–Schwarz:

$$\sum_{j=2}^{\infty} |a_j|\,|z|^j \leq \Big(\sum_{j=2}^{\infty} |a_j|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{j=2}^{\infty} |z|^{2j}\Big)^{1/2} \leq \|f\|_2 \frac{|z|^2}{\sqrt{1-|z|^2}} \leq \frac{|z|^2}{\sqrt{1-|z|^2}}$$

Hemos usado la notación $\|f\|_2 = \big(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2\big)^{1/2}$ para funciones holomorfas en $\mathbb{D}$, y que para f holomorfa en $\mathbb{D}$ con $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ se tiene que $\|f\|_2 \leq 1$.

Repasando la demostración se obtiene:

Lema 4.30 *Si f es holomorfa en $\mathbb{D}$, con $\|f\|_2 \le 1$, y tal que $f(0)=0$, entonces*

$$f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}\big(0, |f'(0)|^2/6\big)\,.$$

O, más generalmente,

Lema 4.31 *Si f es holomorfa en $\mathbb{D}$, con $\|f\|_2 \le R$, entonces*

$$f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}\big(f(0), |f'(0)|^2/(6R)\big)\,.$$

♠

4.4.2. Lema de cubrimiento biholomorfo

El corolario 4.27 del teorema 4.26 de cubrimiento de Landau nos dice que si f es una función holomorfa en $\mathbb{D}$, tal que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}(0,R)$ y $f(0)=0$ y $|f'(0)|=1$ se tiene que $f(\mathbb{D})$ *cubre* un disco de centro 0 y radio $1/(4R)$.

Vamos ahora a obtener una mejora, y es que bajo esas mismas hipótesis, de hecho f *cubre biholomorfamente* un disco de centro 0 y radio $1/(6R)$. Como ya hemos apuntado, estas constantes $1/4$ o $1/6$ no son las mejores posibles. Lo importante es que se trata de constante absolutas.

Sea f holomorfa en un dominio Ω. Decimos que f **cubre biholomorfamente el disco** $\mathbb{D}(a,r)$ si en $\mathbb{D}(a,r)$ está definida una función ϕ holomorfa con valores en Ω de manera que $f(\phi(w))=w$, para todo $w \in \mathbb{D}(a,r)$. La función ϕ es biholomorfa de $\mathbb{D}(a,r)$ sobre $\widetilde{\Omega} \triangleq \phi(\mathbb{D}(a,r))$, que es un subdominio simplemente conexo de Ω. Así que f es biholomorfa de $\widetilde{\Omega}$ sobre $\mathbb{D}(a,r)$

Seguiremos aquí el enfoque del apartado 4.4.1.

Supongamos que f es holomorfa en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ y que $|f(z)| \le R$, si $z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D})$ y, además que $f(0)=0$ y que $|f'(0)|=1$. La idea es que $f(z)$ ha de parecerse a la función z, donde el grado de aproximación estará controlado por el dato R.

Usando el desarrollo de Taylor de f alrededor de $z=0$ y que los coeficientes de Taylor a_n de f cumplen que $|a_n| \le R$, para $n \ge 2$, tenemos que

$$|f(z)-z| \le R\,\frac{|z|^2}{1-|z|}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D})\,.$$

Fijemos $r \in (0,1)$ tal que

$$R\,\frac{r^2}{1-r} \le \frac{r}{2}\,,$$

es decir, $r \le 1/(2R+1)$. Entonces si $|z|=r$ y $|w|<r/2$, tenemos que

$$|f(z)-w-(z-w)| = |f(z)-z| \le \frac{r}{2} < |z-w|\,.$$

El teorema de Rouché nos dice entonces que para $w \in \mathbb{D}(0,r/2)$ las funciones $f(z)-w$ y $z-w$ de variable z tienen el mismo número de ceros en $\mathbb{D}(0,r)$, es decir, la ecuación $f(z)-w$ con incógnita z tiene una única solución en $\mathbb{D}(0,r)$.

Denotemos esa única solución por $\phi(w)$. Así que $\phi(w) \in \mathbb{D}(0,r)$ y $f(\phi(w)) = w$, para cada $w \in \mathbb{D}(0,r)$.

Resta ver que ϕ es holomorfa. Para comprobar este hecho usamos un argumento general (de amplio espectro).

El principio del argumento nos da que

$$1 = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dw\,, \quad \text{para todo } w \in \mathbb{D}(0,r/2)\,,$$

pues $f(z) - w$ tiene 1 cero en $\mathbb{D}(0,r)$. Recuerde lector que el principio del argumento se obtiene aplicando el teorema de los residuos, que $\frac{f'(z)}{f(z)-w}$ sólo tiene un polo en $z = \phi(w)$, y que allí el residuo es exactamente 1. El mismo argumento da que

$$(\star) \qquad \phi(w) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{|z|=r} \frac{z\,f'(z)}{f(z)-w}\,dw\,, \quad \text{para todo } w \in \mathbb{D}(0,r/2)\,,$$

pues el residuo de $z\,\frac{f'(z)}{f(z)-w}$ en $\phi(z)$ es $\phi(w)$. Esta expresión $(\star)$ nos dice que ϕ es ya una función holomorfa.

La conclusión es que f cubre biholomorfamente el disco $\mathbb{D}(0,r/2)$.

Dispensamos ahora la hipótesis extra de que f no sólo es holomorfa en $\mathbb{D}$, sino en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$.

Si $R = 1$, entonces, por el caso de igualdad del lema de Schwarz, f es una rotación alrededor de $z = 0$ y f cubre biholomorfamente el disco $\mathbb{D}$. Si $R > 1$, como $r/2 > 1/(6R)$, consideramos $z \longmapsto f(sz)/s$ con $s < 1$ pero próximo a 1, para aprovechar este margen, y concluir que, en cualquier caso,

f *cubre biholomorfamente el disco* $\mathbb{D}(0, 1/(6R))$.

En la normalización alternativa: f holomorfa en $\mathbb{D}$, con $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y $f(0) = 0$ obtendríamos al considerar $f(z)/f'(0)$ que

f *cubre biholomorfamente el disco* $\mathbb{D}(0, |f'(0)|^2/6)$.

Éstas son justamente las conclusiones de la prueba alternativa (algo más débil) del teorema de cubrimiento de Landau que hemos desarrollo en el apartado 4.4.1, pero con el *bonus extra* de que no sólo f cubre discos de radio especificado sino que f cubre *biholomorfamente*.

4.5. Teorema de Bloch

El teorema que da título a este apartado es asombrosamente simple (en su enunciado) y potente (en sus aplicaciones).

De él deduciremos los teoremas de Schottky y de Picard, que nos ocuparán en apartados siguiente; aunque su *descubrimiento* es posterior a aquellos.

Teorema 4.32 (Teorema de Bloch) *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$. Entonces*

$$f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}(*, |f'(0)|/4)\,.$$

¡No hay hipótesis! (más allá de holomorfía, claro). En otros términos, f *cubre un disco de radio* $|f'(0)|/4$.

Esto es lo que Littlewood (a quién obviamente le hubiera gustado[3] haber *descubierto* el teorema de Bloch) tiene que decir acerca de este teorema en [9], página 183.

> *This exceedingly odd and striking theorem resembles* [el teorema de cubrimiento de Landau, como se enuncia en el corolario 4.27]*, but the condition $|f| < R$ of the latter theorem is completely dropped* (*and nothing replaces it, except that* [la cota $R\,\eta(1/R)$] *is replaced by an absolute constant*)*. It can be used to prove some of the "Picard" theorems* [...] (*indeed it gives proofs in which the function theory involved is of the least possible "depth"*) [...]
>
> *Given the existence of the theorem, and* (*what will become plausible in a moment*) *that Landau's theorem is relevant to its proof, any competent analyst should be able to find one: it is true that then oddity of the theorem is reflected in the critical step, but the step is forced, and then not difficult to make.*

☞ **Nota** 4.5.1. ☜ Alternativamente, podemos enunciar el teorema de Bloch normalizando la derivada: si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $|f'(0)| = 1$ entonces $f(\mathbb{D})$ contiene un disco de radio $1/4$.

Los comentarios de Littlewood se refieren a este enunciado: la constante universal a la que alude es este $1/4$. ♠

Aquí $*$ denota un punto desconocido de $f(\mathbb{D})$. Hemos enunciado el teorema de Bloch de esta manera un tanto abstrusa para enfatizar que ese punto $*$ *no* es, como pudiera quizás pensarse, $f(0)$, véase el ejemplo 4.5.1. La conclusión del teorema de Bloch puede escribirse sin hacer alusión a ese punto como centro en la forma

$$f(\mathbb{D}) \text{ contiene un disco de radio } |f'(0)|/4\,.$$

Por cierto, aún no se conoce el valor de la mejor constante en el teorema de Bloch. Es decir, no se conoce el mayor valor de L tal que para cualquier f holomorfa en $\mathbb{D}$ con $|f'(0)| = 1$ entonces $f(\mathbb{D})$ contiene a un disco de radio tan próximo a L como se quiera. Tenemos que $L \geq 1/4$, por nuestro enunciado del teorema de Bloch y $L \leq 1$, como nos apunta la función identidad. A esta constate L se le conoce como **constante de Landau**.

Si con la misma demostración que vamos a ver a continuación apeláramos a los resultados del apartado 4.4.2 en lugar de al propio teorema 4.26 de cubrimiento de Landau, obtendríamos:

[3] ¡Y a quién no!

Teorema 4.33 (Teorema de Bloch, cubrimiento biholomorfo) *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$. Entonces f cubre biholomorfamente un disco de radio $|f'(0)|/6$.*

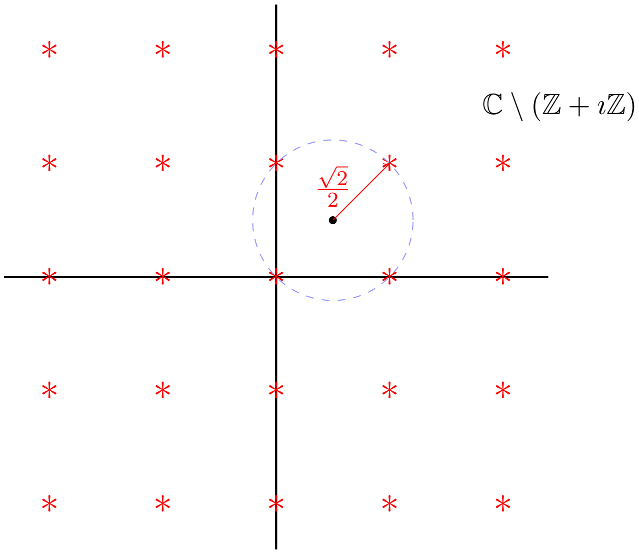
Por cierto *bis*, aún no se conoce el valor de la mejor constante en este teorema de Bloch de cubrimiento biholomorfo. Es decir, no se conoce el mayor valor de B tal que, para cualquier f holomorfa en $\mathbb{D}$ con $|f'(0)| = 1$, f cubra biholomorfamente un disco de radio tan próximo a B como se quiera. Tenemos que $B \geq 1/4$, por nuestro enunciado del teorema de Bloch, y $B \leq L$, claro. Esta constante B es conocida como **constante de Bloch**.

Definición 4.2 Para un dominio Ω en $\mathbb{C}$ definimos su radio interno $R(\Omega)$ como

$$R(\Omega) = \sup_{w \in \Omega} \operatorname{dist}(w, \partial\Omega)\,.$$

En otros términos, $R(\Omega)$ es el supremo de los radios de los discos contenidos en Ω.

El radio interno de una banda es la mitad de su ancho, mientras que para un semiplano es $+\infty$. Para $\Omega = \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} + \imath\mathbb{Z})$, el radio interno es $1/\sqrt{2}$. A los dominios Ω tales que $R(\Omega) < +\infty$, se les dice **dominios de Bloch**.



Dibujo 4.6. Radio interno de $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} + \imath\mathbb{Z})$.

La siguiente formulación *equivalente* es una versión invariante del teorema 4.32 de Bloch.

Teorema 4.34 (Formulación invariante del teorema de Bloch) *Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$ y sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$. Si $f(\mathbb{D}) \subset \Omega$, entonces*

$$(\star) \qquad \sup_{z \in \mathbb{D}} f^{\natural}(z) \leq 2\; R(\Omega)\,.$$

En realidad, como veremos en su demostración, se puede poner en lugar de 2 una constante más pequeña.

Obsérvese que en la izquierda de ($\star$) aparece una cantidad que podemos calificar de analítica, asociada a la función holomorfa f, mientras que en la derecha de ($\star$) se exhibe una condición geométrica sobre un dominio Ω; una función f y un dominio Ω vinculados porque f tiene imagen en Ω. Es este un ejemplo señero de lo que se conoce como "teoría geométrica de funciones").

demostración de la equivalencia de los enunciados de los teoremas 4.32 y 4.34. El teorema de Bloch nos da para f holomorfa en $\mathbb{D}$ y con $f(\mathbb{D}) \subset \Omega$ que $|f'(0)| \leq 4\,R(\Omega)$, es decir, $f^\natural(0) \leq 2\,R(\Omega)$. Para $a \in \mathbb{D}$, tenemos $f \circ T_a$ cumple $(f \circ T_a)(\mathbb{D}) = f(\mathbb{D}) \subset \Omega$, pero además $(f \circ T_a)^\natural(0) = f^\natural(a)$, y, por tanto, $f^\natural(a) \leq 2\,R(\Omega)$.

Para comprobar la otra dirección, tomemos f holomorfa en $\mathbb{D}$ y sea $\Omega = f(\mathbb{D})$. El teorema 4.34 da que

$$|f'(0)| = 2\,f^\natural(0) \leq 4\,R(\Omega) = 4\,R(f(\mathbb{D}))\,.$$

Esto nos dice que $f(\mathbb{D})$ contiene discos de radio tan próximo (pero inferior) a $|f'(0)|/4$, como se desee.

Para obtener que $f(\mathbb{D})$ contiene un disco de radio $|f'(0)|/4$ apelamos al comentario justo tras el enunciado del teorema 4.34, que nos permite poner (obsérvese el "$<$" estricto) que

$$|f'(0)| < 4\,R(f(\mathbb{D}))$$

y, por tanto, concluir que $f(\mathbb{D})$ contiene un disco $\mathbb{D}(*, |f'(0)|/4)$. ■

Corolario 4.35 *Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$ y sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ tal que $f(\mathbb{D}) \subset \Omega$. Entonces*

$$|f(z) - f(w)| \leq 2\,R(\Omega)\,\rho(z,w)\,, \quad \textit{para todo } z, w \in \mathbb{D}\,.$$

demostración del corolario 4.35. Se sigue inmediatamente del teorema 4.34 y del lema 4.19. ■

Corolario 4.36 *Para cualquier dominio Ω se tiene que*

$$\frac{1}{2}\,R(\Omega) \leq \sup_f \big(\sup_{z\in\mathbb{D}} f^\natural(z)\big) \leq 2\,R(\Omega),$$

donde $\sup_f$ *se extiende a la colección de funciones f holomorfas en $\mathbb{D}$ con $f(\mathbb{D}) \subset \Omega$.*

demostración del corolario 4.36. La desigualdad de la derecha se sigue del teorema 4.34.

Para la desigualdad de la izquierda, tomemos $a \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\mathbb{D}(a,r) \subset \Omega$. Sea f definida en $\mathbb{D}$ por $f(z) = a + rz$. Obsérvese que f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y que $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}(a,r) \subset \Omega$. Como $f^\natural(0) = (1/2)|f'(0)| = r/2$, se deduce que

$$\sup_f \big(\sup_{z\in\mathbb{D}} f^\natural(z)\big) \geq \frac{r}{2}\,,$$

y como esto es cierto para cualquier disco $\mathbb{D}(a,r) \subset \Omega$, se concluye que

$$\sup_f \big(\sup_{z\in\mathbb{D}} f^\natural(z)\big) \geq \frac{1}{2} R(\Omega)\,.$$

■

Ejemplo 4.5.1 ***El siguiente enunciado es falso:*** *existe una constante $A > 0$ tal que para toda función f holomorfa en $\mathbb{D}$, se cumple $f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}(f(0), A|f'(0)|)$. Es decir, en el teorema de Bloch no se puede afirmar que el disco de radio "grande" esté centrado en $f(0)$.*

Consideramos para cada $t > 0$ la función holomorfa en $\mathbb{D}$ dada por $f_t(z) = \exp(tz) - 1$. Obsérvese que $f_t(0) = 0$, y que $-1 \notin f_t(\mathbb{D})$. Además $f_t'(0) = t$. Si el enunciado fuera cierto, tendríamos que $A\,t \leq 1$, para todo $t > 0$, es decir, $A = 0$, lo que supone una contradicción. ♣

El siguiente ejemplo es bien relevante, pues comienza a iluminar el camino hacia el teorema de Picard.

Ejemplo 4.5.2 ***Más allá de Liouville (pero más acá de Picard).*** *Si f es entera y $f(\mathbb{C}) \subset \Omega$, con $R(\Omega) < +\infty$, entonces f es constante.*

Fijemos $a \in \mathbb{C}$ y $R > 0$. Sea g la función holomorfa en $\mathbb{D}$ dada por $g(z) = f(a+Rz)$ para $z \in \mathbb{C}$. Por el teorema 4.34 se tiene que

$$R|f'(a)| = |g'(0)| \leq 4\,R(\Omega)\,.$$

Como esto es cierto para todo $a \in \mathbb{C}$ y para todo $R > 0$ concluímos que $f' \equiv 0$ y, por tanto, que f es constante. ♣

demostración del teorema 4.34. Conviene observar de partida que, apelando a la invarianza del lema 4.17, tenemos que si $a \in \mathbb{D}$, al pasar de la función f a la función $(f\circ T_a) - f(a)$, ninguno de los lados de la desigualdad del enunciado cambia.

Tras esta observación, supongamos primero que f es holomorfa en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ y $f(\mathbb{D}) \subset \Omega$.

En este caso, $f^\natural$ es continua en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ y se anula en $\partial\mathbb{D}$, y, por tanto alcanza un valor máximo, digamos en $a \in \mathbb{D}$, de manera que

$$f^\natural(a) = \max_{z\in\mathbb{D}} f^\natural(z) < +\infty\,.$$

Hemos de probar, por tanto, que $f^\natural(a) \leq 2R(\Omega)$.

Por la invarianza del lema 4.17 y la observación de partida, podemos suponer y suponemos que $a = 0$ y $f(0) = 0$.

Por el lema 4.19 y usando que $f(0) = 0$, tenemos que

$$(\star) \qquad |f(z)| \leq f^\natural(0)\,\rho(0,z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Definamos para $r \in (0,1)$, la función g_r mediante

$$g_r(z) = \frac{f(rz)}{f^\natural(0)\,\rho(0,r)}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}.$$

La función g_r es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $g_r(0) = 0$. Además, por $(\star)$ se tiene que $g_r(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Nótese que

$$|g_r'(0)| = \frac{2r}{\rho(0,r)}\,.$$

Por el teorema de cubrimiento de Landau, teorema 4.26, tenemos que

$$g_r(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}\Big(0, \eta\Big(\frac{2r}{\rho(0,r)}\Big)\Big)\,,$$

que traducido a f significa que

$$R(\Omega) \geq f^\natural(0)\,\rho(0,r)\,\eta\Big(\frac{2r}{\rho(0,r)}\Big)\,.$$

Ahora solo resta optimizar la elección de r.

Puede verse que el máximo de

$$r \longmapsto \eta\Big(\frac{2r}{\rho(0,r)}\Big)\,\rho(0,r)$$

excede a 0.54. Por tanto, podemos concluir, en particular, que

$$R(\Omega) > \frac{1}{2} f^\natural(0)\,,$$

al menos en este caso en el que f es holomorfa en $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$.

Para el caso general, considérese la función $h_r(z) = f(rz)$. Como $h_r(\mathbb{D}) \subset f(\mathbb{D})$, para h_r se tiene que

$$|h_r'(z)|(1-|z|^2) \leq 4\,R(\Omega)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,,$$

de donde haciendo $r \uparrow 1$ se deduce que

$$|f'(z)|(1-|z|^2) \leq 4\,R(\Omega)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,,$$

como se quería ver. ■

Obsérvese que, como habíamos anunciado, la prueba del teorema 4.34 nos permite poner una constante menor que 2 en su conclusión.

☞ **Nota** 4.5.2. ☜ La optimización (numérica) en la elección de $r \in (0,1)$ en la demostración del teorema 4.34 de Bloch busca exhibir una constante sencilla como 2. Si, por ejemplo, hubiéramos tomado $r = 1/2$, hubiéramos obtenido la conclusión con el 2 reemplazado por

$$\frac{\rho(0,1/2)}{\eta\big(\rho(0,1/2)^{-1}\big)} = \frac{\ln(3)}{\eta(1/\ln(3))}\,.$$

♠

El corolario 4.35 nos dice que si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $f(\mathbb{D}) \subset \Omega$, entonces

$$|f(z) - f(0)| \leq 2\,R(\Omega) \ln\Big(\frac{1+|z|}{1-|z|}\Big), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Obviamente, esta acotación sólo es significativa si $R(\Omega) < +\infty$, es decir, si Ω es un dominio de Bloch. En realidad, quizás lo más relevante de esta cota es que hay una función $B(a,r)$ definida para $a \geq 0$ y $r \in [0,1)$ de manera que *para toda f holomorfa en $\mathbb{D}$ con valores en Ω* y *para todo $z \in \mathbb{D}$* se tiene que

$$|f(z)| \leq B(|f(0)|, r)\,.$$

La cota sólo depende de f a través de $|f(0)|$. Conseguir una cota de esta naturaleza cuando $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ será el objetivo del teorema de Schottky. Por supuesto, en el caso de dominios de Bloch la cota es

$$B(a,r) = a + 2R(\Omega)\,\ln\Big(\frac{1+r}{1-r}\Big)\,.$$

4.6. Omisión de valores

Advertimos al lector incauto que no, que éste no es un apartado sobre Ética o Sociología, no.

En estos temas que estamos tratando es tradicional pasar al complementario y poner énfasis en los valores que una función holomorfa f *no toma* y no tanto, aunque también, al dominio Ω que contiene a la imagen de f.

Definición 4.3 Sea f holomorfa en un cierto dominio $\Gamma \subset \mathbb{C}$ (habitualmente tendremos $\Gamma = \mathbb{D}$ o $\Gamma = \mathbb{C}$).

Sea $w \in \mathbb{C}$. Se dice que f **omite el valor** w si $w \notin f(\Gamma)$.

Sea $E \subset \mathbb{C}$. Se dice que f **omite el conjunto** E si $f(\Gamma) \cap E = \emptyset$.

Se dice que un subconjunto E cerrado de $\mathbb{C}$ es **$\boldsymbol{\delta}$-denso**, donde $\delta > 0$, si

$$\bigcup_{w \in E} \mathrm{cl}\big(\mathbb{D}(w,\delta)\big) = \mathbb{C}\,.$$

En otros términos, E es δ-denso si todo punto de $\mathbb{C}$ dista a lo sumo δ de algún punto de E. Los enteros gaussianos, $\mathbb{Z} + \imath\mathbb{Z}$, constituyen un conjunto $(\sqrt{2}/2)$-denso.

El teorema de Bloch en su formulación invariante, teorema 4.34, afirma que si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y omite un conjunto E que es δ-denso, entonces

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} f^{\natural}(z) \leq 2\,\delta\,,$$

y, por tanto, en particular,

$$|f(z) - f(0)| \leq 2\ \delta\ \rho(0,z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,,$$

pues de que $\mathbb{C} \setminus \Omega$ sea δ-denso se sigue que $R(\Omega) \leq \delta$.

Este enunciado del teorema ejemplifica un fenómeno que vamos a seguir analizando, y es que cuanto más grande sea el conjunto E omitido por una función holomorfa f, más pequeña es la función f, en el sentido de que crece más lentamente: si el conjunto E que es δ-denso se amplía, entonces el δ disminuye y la derivada de f se reduce.

4.6.1. Conjuntos omitidos y elevación de funciones holomorfas

Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$ que omite un cierto conjunto F.

Si podemos escribir $f = \Pi \circ g$, donde g es holomorfa en $\mathbb{D}$ y donde Π es holomorfa al menos en $g(\mathbb{D})$, decimos que g **es una elevación de** f. La función Π es el **elevador**. Obsérvese que en esta situación g omite necesariamente a $G = \Pi^{-1}(F)$.

La idea es conseguir elevaciones tales que $\Pi^{-1}(F)$ sea considerablemente más grande y mejor distribuido (a lo largo $\mathbb{C}$) que F.

EJEMPLO 4.6.1 *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$ que omite $\{0,1\}$ (sólo dos puntos). Para cada entero $m \geq 2$, podemos hallar g holomorfa en $\mathbb{D}$ tal que $f \equiv g^m$. La función g omite las m raíces de la unidad además de a 0.*

Aquí el elevador Π es simplemente la potencia $\Pi(z) = z^m$, para todo $z \in \mathbb{C}$, que, en este caso, es entera.

La existencia de g se sigue de que $\mathbb{D}$ es simplemente conexo y de que f no se anula: escribimos primero $f = e^u$, donde u es holomorfa en $\mathbb{D}$, y luego hacemos $g \equiv e^{u/m}$.

Así que si f es tal que omite $F = \{0,1\}$ entonces tenemos que g omite $G = \{0\} \cup \{e^{2\pi \imath j/m}; 0 \leq j < m\}$. Obsérvese que, recíprocamente, si tenemos una g holomorfa en $\mathbb{D}$ que omite este conjunto G entonces $f = g^m$ omite $F = \{0,1\}$.

Note, lector, que si la f dada omitiera no sólo $\{0,1\}$ sino todos los enteros no negativos $\{0,1,\ldots\}$, entonces la g anterior omitiría

$$G = \{\sqrt[m]{n}\, e^{2\pi \imath j/m}; n \geq 0, 1 \leq j < m\},$$

que, en particular, contiene a 0. ♣

Discutimos a continuación un par de ejemplos de elevaciones que adecuadamente combinadas nos van a permitir pasar de una f que omite $F = \{0,1\}$ a una g que omite un G que es δ-denso, para un cierto $\delta > 0$, y a la que por tanto le podremos aplicar el teorema de Bloch.

EJEMPLO 4.6.2 *Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$ que omite $\{0,1\}$ (sólo dos puntos). Podemos escribir $f = e^{2\pi \imath g}$, donde g es holomorfa en $\mathbb{D}$ y omite $\mathbb{Z}$.*

Como f no se anula y $\mathbb{D}$ es simplemente conexo, f tiene un logaritmo u holomorfo en $\mathbb{D}$. Así que $f = e^u$. Como f además omite 1, la función u ha de omitir $E = \{2k\pi\imath; k \in \mathbb{Z}\}$; de manera que $g \triangleq u/(2\pi\imath)$ omite todo $\mathbb{Z}$.

Aquí el elevador Π es la función $\Pi(z) = e^{2\pi\imath z}$, para todo $z \in \mathbb{C}$. ♣

En este ejemplo 4.6.2, de omitir dos puntos (que con un cambio de escala puede suponerse que son dos puntos cualesquiera) hemos pasado a omitir todos los enteros. Obsérvese que, recíprocamente, si g es holomorfa en $\mathbb{D}$ y omite $\mathbb{Z}$, entonces $f = e^{2\pi\imath g}$ es holomorfa en $\mathbb{D}$ y omite 0 y 1.

Si f omitiera tan sólo un valor, digamos, 0, entonces aún podríamos tomar un logaritmo holomorfo g de f, pero esta g no tendría por qué omitir valor alguno.

Pero $\mathbb{Z}$ no es δ-denso para ningún $\delta > 0$, así que g no está al alcance del teorema de Bloch.

Obsérvese que la función g del ejemplo 4.6.2 omite 0, pues omite todo $\mathbb{Z}$, así que, ¿por qué no?, podemos volver a tomar logaritmos. Veamos.

Si escribimos $g = e^{2\pi\imath h}$, con h holomorfa en $\mathbb{D}$, tenemos que h omite todo $\mathbb{Z}$, pues g omite 1. Pero como g omite muchos otros valores (todos los demás enteros), h omite mucho más que todo $\mathbb{Z}$; de hecho, h omite todo el conjunto

$$(\star) \quad E = \Big\{ \frac{-\ln(k)}{2\pi}\imath + \frac{j}{2};\, k, j \in \mathbb{Z}, k \geq 0 \Big\}.$$

Este E es δ-denso (por ejemplo, con $\delta = 1$) en el semiplano inferior, pero no en todo $\mathbb{C}$:

$$\big\{z \in \mathbb{C}; \Im(z) \leq 0\big\} \subset \Big[\bigcup_{w\in E} \mathrm{cl}(\mathbb{D})(w,1)\Big] \subset \big\{z \in \mathbb{C}; \Im(z) \leq 1\big\}.$$

¿Y si volviéramos a tomar logaritmos? Al fin y al cabo, un logaritmo nos ha permitido pasar de omitir $\{0, 1\}$ a omitir $\mathbb{Z}$, y un segundo logaritmo de omitir $\mathbb{Z}$ a omitir el conjunto E de $(\star)$, que es δ-denso en un semiplano. Quizás, imaginamos esperanzados, ...el conjunto omitido fuera entonces δ-denso en todo $\mathbb{C}$, para algún $\delta > 0$. Pero no, no es el caso.[4]

Veamos. Supongamos que α es una función holomorfa en $\mathbb{D}$ que omite un conjunto E discreto y que contiene a 0, como el E dado por $(\star)$. Pongamos que $r = \mathrm{dist}(0, \setminus\{0\}$, que es > 0 pues E es discreto. Tomemos ahora β un logaritmo holomorfo de α. Así que $\alpha \equiv e^{\beta}$. La función β omite el conjunto F dado por

$$F = \big\{w \in \mathbb{C}; e^w \in E \setminus \{0\}\big\}.$$

Pero si $w \in \mathcal{F}$, entonces $|e^w| > r$ y, por tanto, $\Re(w) > \ln r$, y $F \subset \{z \in \mathbb{C}; \Re(z) > \ln(r)\}$.

De la discusión anterior aflora un indicio positivo. Obsérvese que si una función f holomorfa en $\mathbb{D}$ omite el conjunto $\widehat{E} = \{1/n; n \geq 1\} \cup \{n; n \geq 1\}$, formado por *dos*

[4]

¡Ay, pena, penita, pena -pena-,
pena de mi corazón,
que me corre por las venas -pena-
con la fuerza de un ciclón!

sucesiones, una que se acumula en 0 y otra en $\infty_{\mathbb{C}}$, entonces un logaritmo holomorfo g de f omite $\{\pm \ln n + 2k\pi\imath;\ n \geq 1, k \in \mathbb{Z}\}$, que sí es δ-denso para algún $\delta > 0$.

Vamos a pertrecharnos ahora con una elevación adicional que nos va a permitir ponernos en posición de omitir un conjunto análogo a $\widehat{E}$.

EJEMPLO 4.6.3 *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$ que omite $\{-1, 1\}$. Entonces existe una función g holomorfa en $\mathbb{D}$ que omite en $\{-1, 0, 1\}$ y tal que*

$$f \equiv J(g)\,,$$

donde J es la transformación (de Jukowski) dada por

$$J(z) = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Consúltese el apartado 1.0.1, dedicado a la función J.

No parece a priori que esta transformación nos ayude, sino más bien al contrario: el conjunto omitido apenas se amplía, e involucramos a un elevador $\Pi = J$ que es una función racional.

Para obtener g procedemos como sigue. Como $f^2 - 1$ no se anula y $\mathbb{D}$ es simplemente conexo, podemos tomar una raíz cuadrada u holomorfa (en $\mathbb{D}$) de $f^2 - 1$, es decir, $u^2 \equiv f^2 - 1$.

Recuérdese que $J^{-1}(w) = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$, donde $\pm\sqrt{w^2 - 1}$ denota las raíces cuadradas de $w^2 - 1$, que son dos salvo para $w = \pm 1$, en que es una sola pero doble; además, el producto de esas dos antiimágenes es 1, es decir, $(w + \sqrt{w^2 - 1})(w - \sqrt{w^2 - 1}) = 1$ (por la simetría $J(z) = J(1/z)$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$).

Tomamos $g \equiv f + u$ (es decir $g = f + \sqrt{f^2 - 1}$). Como $(f + u)\,(f - u) \equiv 1$, la función g no se anula y

$$J(g) \equiv \frac{1}{2}\Big(g + \frac{1}{g}\Big) \equiv \frac{1}{2}\big((f + u) + (f - u)\big) \equiv f\,.$$

Finamente, como $J(1) = 1$ y $J(-1) = -1$, la función g omite $\{-1, 1\}$ además de 0.

El recíproco es válido, pues si g es una función holomorfa en $\mathbb{D}$ que omite $\{-1, 0, 1\}$ entonces $J(g)$ es holomorfa (pues g no se anula) y omite $\{-1, 1\}$. ♣

La prometida combinación de estos dos ejemplos 4.6.2 y 4.6.3 estriba en la siguiente argucia. Denotemos con A el peculiar conjunto de números reales

$$A = \{a_n = n + \sqrt{n^2 - 1}; n \geq 1\} = \{1, 2 + \sqrt{3}, \ldots, \}\,.$$

Supongamos que la función f holomorfa en $\mathbb{D}$ omite todo $\mathbb{Z}$. En particular f omite $\{-1, 1\}$, de manera que podemos elevar f a través de J, es decir, $f \equiv J(g)$ con g holomorfa en $\mathbb{D}$. La función g omite no sólo $\{-1, 0, 1\}$, como dicta el ejemplo 4.6.3, sino que además omite $J^{-1}(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, pues f omite $\mathbb{Z}$.

Como $(n+\sqrt{n^2-1})(n-\sqrt{n^2-1})=1$, para cualquier $n\geq 1$, se tiene que

$$J^{-1}(\mathbb{Z}\setminus\{0\})=A\cup(1/A)\cup(-A)\cup(-1/A)\,.$$

donde, por ejemplo, $1/A=\{1/a; a\in A\}$.

Lo relevante de esta construcción es que $J^{-1}(\mathbb{Z})$ contiene una sucesión que tiende pausadamente a ∞, y *además*, a diferencia de $\mathbb{Z}$, una sucesión que converge pausadamente a 0. Recuerde, lector, o repase, la discusión tras el ejemplo 4.6.2.

Así que tenemos:

Proposición 4.37 *Si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y omite $\{0,1\}$, entonces*

$$f=\exp\big(2\pi\imath J(h)\big)\,,$$

donde h es holomorfa en $\mathbb{D}$ y omite 0 y $J^{-1}(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$.

DEMOSTRACIÓN. Primero escribimos $f=\exp\big(2\pi\imath g\big)$, donde g es holomorfa en $\mathbb{D}$ y omite $\mathbb{Z}$. Por la discusión anterior, $g=J(h)$, donde h es holomorfa en $\mathbb{D}$ y omite 0 y $J^{-1}(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$. ■

Volviendo a la discusión tras el ejemplo 4.6.2: ahora sí, si tomamos un logaritmo de la g de la conclusión de la proposición 4.37, sí que tendremos un conjunto omitido δ-denso.

Lema 4.38 *El conjunto*

$$\mathcal{S}=\exp^{-1}(J^{-1}(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$$

es δ-denso con

$$\delta=\frac{1}{2}\sqrt{\pi^2+(\ln(2+\sqrt{3}))^2}\approx 1.703<2\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Obsérvese que

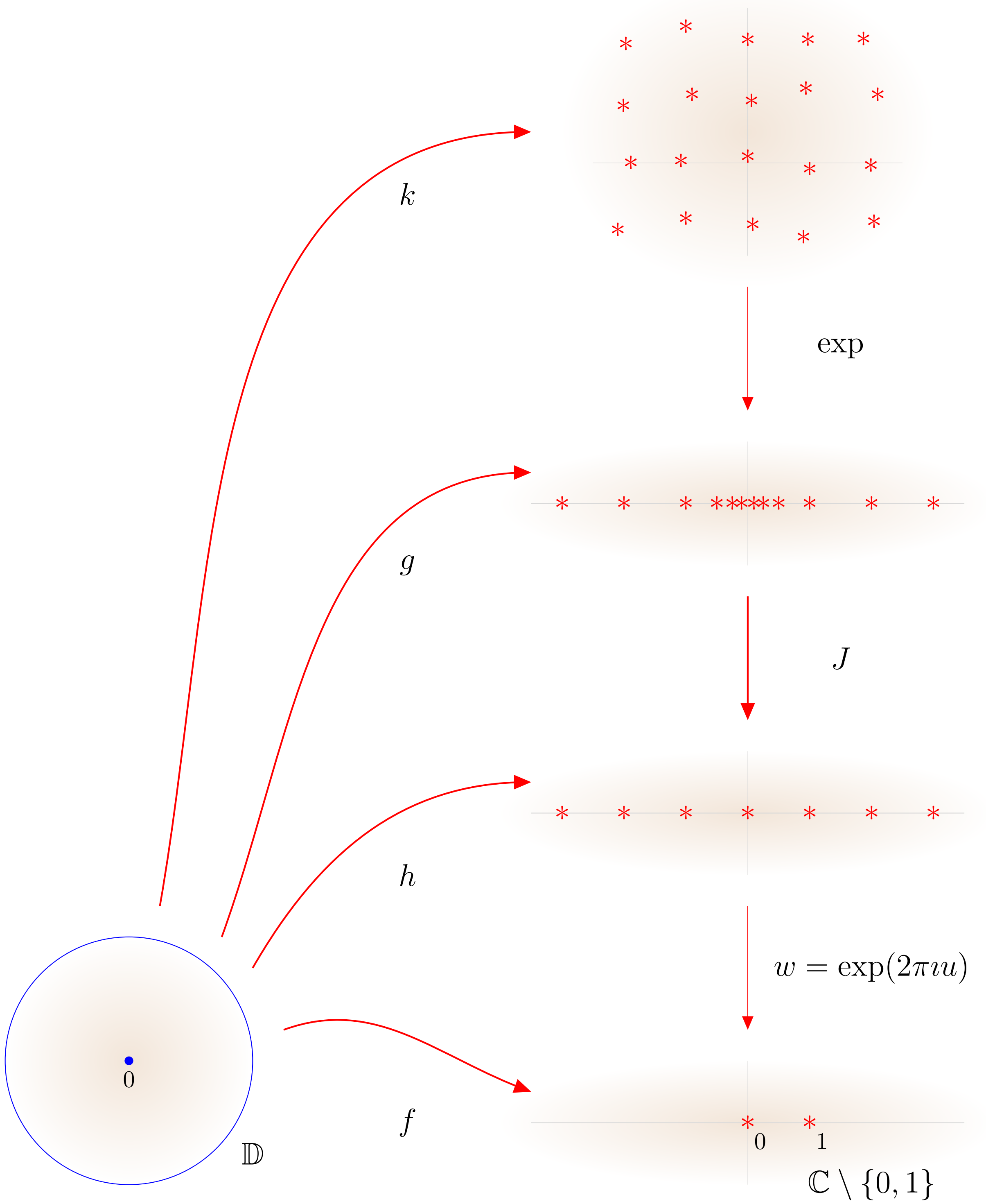
$$\mathcal{S}=\{\pm\ln(n+\sqrt{n^2-1})+\imath\pi k; n\geq 1, k\in\mathbb{Z}\}\,.$$

■

Si partimos de una función f holomorfa en $\mathbb{D}$, podemos utilizar el ejemplo 4.6.2, la proposición 4.37 y el lema 4.38 para obtener la siguiente torre de elevaciones que llamamos **torre de Schottky**:

$$\begin{array}{r|l} & f \text{ omite } \{0,1\} \\ f=\exp(2\pi\imath h) & h \text{ omite } \mathbb{Z} \\ h=J(g) & g \text{ omite } J^{-1}(\mathbb{Z}\setminus\{0\}) \\ g=\exp(2\pi\imath k) & k \text{ omite } \mathcal{S} \text{ que es 2-denso} \end{array}$$

que se recoge en el dibujo 4.7.



Dibujo 4.7. TORRE DE SCHOTTKY.

En suma,

Teorema 4.39 *Si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y omite $\{0,1\}$, entonces podemos escribir*

$$f \equiv \exp\left(2\pi\imath J(e^k)\right) \equiv \exp(2\pi\imath \cosh(k)),$$

donde k es holomorfa en $\mathbb{D}$ y omite el conjunto 2-denso $\mathcal{S}$.

4.6.2. Teorema pequeño de Picard

El teorema 4.39 permite elevar cualquier función holomorfa en $\mathbb{D}$ que omita $\{0,1\}$ a una función holomorfa en $\mathbb{D}$ que omite el conjunto 2-denso $\mathcal{S}$. El papel del disco $\mathbb{D}$ en todo lo anterior es menor, sólo se ha usado de $\mathbb{D}$ que es un dominio simplemente conexo, en particular, en el teorema 4.39 se puede reemplazar f por una función entera (que omite $\{0,1\}$) y concluir que existe g entera que omite el conjunto 2-denso $\mathcal{S}$.

El teorema (llamado) pequeño de Picard afirma que:

Teorema 4.40 (Teorema pequeño de Picard) *Si una función entera omite dos valores, entonces es constante.*

Éste es uno de los grandes teorema de la teoría de funciones: un enunciado limpio y con una conclusión asombrosa.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que esos dos valores omitidos son $\{0,1\}$. Como acabamos de comentar, podemos elevar f (por el análogo del teorema 4.39 para $\mathbb{C}$ en lugar de $\mathbb{D}$) a una función g entera que omite el conjunto $\mathcal{S}$.

Como $\mathcal{S}$ es 2-denso, el dominio imagen $g(\mathbb{C})$ tiene radio interior $R(g(\mathbb{C})) \leq 2$. Por el ejemplo 4.5.2, la función g es constante, y, por consiguiente, la función f es asimismo constante. ■

En otros términos si f es una función entera no constante entonces $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ o $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ para algún $a \in \mathbb{C}$.

La exponencial $f(z) = e^z$ nos dice que omitir un sólo valor (en este caso 0) no basta para la conclusión de ser constante.

Tomemos una función f entera no constante. Fijemos $w \in \mathbb{C}$ y consideremos la ecuación $f(z) = w$ con incógnita $z \in \mathbb{C}$. Si f es polinomio, entonces la ecuación tiene siempre, para todo $w \in \mathbb{C}$, una solución (de hecho, por el teorema fundamental del álgebra, tiene exactamente tantas soluciones como el grado del polinomio). Si f no es un polinomio, el teorema de Picard nos dice que, salvo para un posible valor de w, la ecuación $f(z) = w$ tiene al menos una solución. El teorema grande de Picard, apartado 4.8, mejora sustancialmente esta conclusión.

4.7. Teorema de Schottky

Teorema 4.41 (Teorema de Schottky) *Para cualquier función f holomorfa en $\mathbb{D}$ que omite $\{0,1\}$ se tiene que*

$$\big|\ln|f(z)|\big| \le A\big(1+\big|\ln|f(0)|\big|\big)\Big(\frac{1+|z|}{1-|z|}\Big)^4, \quad \textit{para todo } z\in\mathbb{D}\,,$$

donde A es una constante absoluta.

Podemos tomar $A = 18\pi$.

Por estética normalizadora, a la que, sin duda, el lector está positivamente inclinado, el conjunto que se omite en el enunciado del teorema de Schottky es $\{0,1\}$. Si f omitiera $\{a,b\}$ con $a\neq b$, bastaría considerar $(f-a)/(b-a)$, que omitiría $\{0,1\}$.

Como corolario del teorema de Schottky (pero con rango de teorema) se deduce la siguiente:

¿OTRA? DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE PICARD, TEOREMA 4.40. Sea f entera que omite dos valores distintos. Queremos comprobar que f es constante. Podemos suponer que f omite 0 y 1. Fijemos $R>0$ (que luego haremos tender a $+\infty$). Consideremos la función g_R definida en $\mathbb{D}$ mediante $g_R(z)=f(Rz)$. La función g_R es holomorfa en $\mathbb{D}$, omite 0 y 1, y, además, $g_R(0)=f(0)$.

Por el teorema de Schottky aplicado a g_R tenemos

$$\big|\ln|g_R(z)|\big| \le A\big(1+\big|\ln|f(0)|\big|\big)\Big(\frac{1+|z|}{1-|z|}\Big)^4, \quad \text{para todo } z\in\mathbb{D}\,.$$

Para $z\in\mathbb{C}$ fijo y $|z|<R$ esto nos dice que

$$\big|\ln|f(z)|\big| \le A\big(1+\big|\ln|f(0)|\big|\big)\Big(\frac{1+|z|/R}{1-|z|/R}\Big)^4.$$

Si mantenemos z fijo (pero arbitrario) y hacemos $R\uparrow+\infty$ obtenemos que

$$\big|\ln|f(z)|\big| \le A\big(1+\big|\ln|f(0)|\big|\big)\,.$$

Por consiguiente $|f|$ está acotada y por el teorema de Liouville, f es constante. ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.41 DE SCHOTTKY. Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$ que omite $\{0,1\}$. Vamos a usar la elevación del teorema de 4.39 que nos da una función holomorfa k que omite un conjunto 2-denso. Acotaremos k aplicando el teorema de Bloch y luego desharemos la elevación hasta obtener la cota pedida para f.

a) Por el ejemplo 4.6.2 podemos escribir

$$(\star)\quad f\equiv e^{2\pi\imath g}\,,$$

donde g es holomorfa en $\mathbb{D}$ y g omite $\mathbb{Z}$. Si a g le añadimos un número entero cualquiera, la ecuación $(\star)$ no se ve afectada, así que podemos suponer (y suponemos) que $\Re g(0)\in[1,2]$.

Por tanto, $1 \leq |g(0)| \leq 2 + \frac{1}{2\pi}\big|\ln|f(0)|\big|$.

La función g omite $\mathbb{Z}$, y, en particular, omite $\{-1, 1\}$, así que podemos apelar al ejemplo 4.6.3 para escribir

$$g \equiv J(h)\,.$$

Finalmente, sea k un logaritmo holomorfo en $\mathbb{D}$ de la función h (que como omite $\mathbb{Z}$ no se anula), es decir, $h \equiv e^k$.

La función k omite el conjunto $\mathcal{S}$, que es 2-denso, así que por el teorema 4.34 tenemos que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} k^\natural(z) \leq 4\,,$$

y, por tanto, que

$$|k(z) - k(0)| \leq 4\,\rho(0, z)\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

b) Ahora desenvolvemos las sucesivas elevaciones, trasladando la cota de k hasta llegar a una cota de f.

Como $|h| \equiv e^{\Re(k)}$, tenemos inmediatamente que

$$|h(z)| \leq |h(0)|\, e^{4\,\rho(0,z)} = |h(0)|\Big(\frac{1+|z|}{1-|z|}\Big)^4, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,,$$

y también que

$$\frac{1}{|h(z)|} \leq \frac{1}{|h(0)|}\Big(\frac{1+|z|}{1-|z|}\Big)^4, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Pasamos ahora a $g = J(h)$. Tenemos enseguida que

$$|g(z)| \leq \Big(\frac{1}{2}\Big(|h(0)| + \frac{1}{|h(0)|}\Big)\Big)\Big(\frac{1+|z|}{1-|z|}\Big)^4, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Si repasamos cómo se construye h a partir de g (en el ejemplo 4.6.3) comprobaremos que

$$\text{máx}\Big\{|h(0)|, \frac{1}{|h(0)|}\Big\} \leq |g(0)| + \sqrt{|g(0)|^2 + 1}\,,$$

y, por tanto, como $|g(0)| \geq 1$, se tiene que

$$\text{máx}\Big\{|h(0)|, \frac{1}{|h(0)|}\Big\} \leq 3|g(0)|.$$

De manera que

$$|g(z)| \leq 3|g(0)|\Big(\frac{1+|z|}{1-|z|}\Big)^4, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

a) Si usamos ahora que $|g(0)| \leq 2 + \frac{1}{2\pi}\big|\ln|f(0)|\big|$ y que $\big|\ln|f(z)|\big| \leq 2\pi|g(z)|$, para todo $z \in \mathbb{D}$, obtenemos, finalmente y como queríamos que,

$$\big|\ln|f(z)|\big| \leq 3(6\pi + \big|\ln|f(0)|\big|)\Big(\frac{1+|z|}{1-|z|}\Big)^4, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

■

4.7.1. Versión finita del teorema pequeño de Picard

Comenzamos con el siguiente corolario del teorema de Schottky.

Corolario 4.42 *Existe una cierta función continua* $\Psi\colon (0,+\infty) \mapsto (0,+\infty)$ *tal que para toda función holomorfa en* $\mathbb{D}$ *que omite* $\{0,1\}$ *se tiene que*

$$|f'(0)| \le \Psi(|f(0)|)\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de Schottky se tiene que, si $|z| \le 1/2$, entonces

$$\ln|f(z)| \le A(1+|\ln|f(0)||)\;3^4 \triangleq \alpha(|f(0)|)\,.$$

Por tanto, si $|z| \le 1/2$, entonces

$$|f(z)| \le e^{\alpha(|f(0)|)} \triangleq \beta(|f(0)|)\,.$$

Por la fórmula de Cauchy,

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{|w|=1/2} \frac{f(w)}{w^2}\,dw\,,$$

de donde

$$|f'(0)| \le \frac{2\pi(1/2)}{2\pi}\frac{\beta(|f(0)|)}{1/4} = 2\beta(|f(0)|) \triangleq \Psi(|f(0)|)\,.$$

■

Corolario 4.43 (Versión finita del teorema pequeño de Picard) *Si* f *es holomorfa en* $\mathbb{D}(0,R)$ *y*

$$|f'(0)| > \frac{\Psi(|f(0)|)}{R}\,,$$

entonces f *o* $f-1$ *se anula en* $\mathbb{D}(0,R)$*. O la revés, si* f *omite* $\{0,1\}$*, entonces* $|f'(0)| \le \Psi(|f(0)|)/R$*.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que no. Entonces la función g dada por $g(z) = f(Rz)$ es holomorfa en $\mathbb{D}$ y omite $\{0,1\}$. Por el corolario 4.42 aplicado a g tenemos que

$$R\,|f'(0)| = |g'(0)| \le \Psi(|g(0)|) = \Psi(|f(0)|)\,.$$

■

Decimos que se trata de una versión finita de Picard porque para f entera que omite $\{0,1\}$ dice enseguida que $f'(0) = 0$, de donde, considerando funciones $z \mapsto f(z+a)$, se deduce que $f'(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{C}$.

4.7.2. Complemento al teorema de Bloch

Ya sabemos que en el teorema de Bloch, el disco de radio $|f'(0)|/4$ que contiene la imagen de una función holomorfa en $\mathbb{D}$ no está necesariamente centrado en $f(0)$. Véase el ejemplo 4.5.1.

Sin embargo, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.44 *Existe una constante universal $A > 0$ tal que si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $r_f = \min\{|w| > 0; f(w) = f(0)\}$, entonces*

$$f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}\big(f(0), A\, r_f |f'(0)|\big)\,.$$

Entendemos que si f toma el valor $f(0)$ sólo en $z = 0$, entonces $r_f = 1$.

Nótese que en el disco $\mathbb{D}(0, r_f)$ la función f toma el valor $f(0)$ tan sólo una sola vez, en 0.

Si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ e inyectiva, entonces $r_f = 1$ y se tiene que $f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}(f(0), A|f'(0)|)$. En este *caso inyectivo*, de hecho se sabe que

$$f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}(f(0), (1/4)|f'(0)),$$

y que ese factor 1/4 es el mejor posible. Este el contenido del teorema 1/4 de Koebe, piedra angular del estudio de las funciones de la llamada clase $\mathcal{S}$ que trataremos en el capítulo 15.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer, y suponemos, que $f'(0) \neq 0$. Definamos una función auxiliar g en $\mathbb{D}$ mediante

$$g(z) = \frac{f(r_f z) - f(0)}{r_f\, f'(0)}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

La función g es holomorfa en $\mathbb{D}$ y cumple $g(0) = 0$ y $g'(0) = 1$. Además g sólo se anula en $z = 0$. Por tanto, podemos suponer que $r_f = 1$, y que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

Sea ahora $b \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D})$. Queremos demostrar que $|b| \geq A$, donde A es una constante absoluta.

Consideremos la función h holomorfa en $\mathbb{D}$ dada por

$$h(z) = 1 - \frac{f(z)}{b}\,.$$

Obsérvese que $h(0) = 1$ y $h'(0) = 1/b$. La función h no se anula. Además, para todo $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ se tiene que $h(z) \neq 1$.

Como $|h'(0)| = 1/|b|$, buscamos demostrar que $|h'(0)| \leq A$, donde A es una constante absoluta.

Como h no se anula en $\mathbb{D}$, podemos tomar k un logaritmo holomorfo de h. Es decir, la función k es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $h \equiv e^k$. Como además $h(0) = 1$, podemos escoger, y escogemos, k de manera que $k(0) = 0$.

Obsérvese que k omite $2\pi\imath(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Aquí es donde se usa la hipótesis clave. Si para un $\breve{z} \in \mathbb{D}$ se tuviera $k(\breve{z}) = 2\pi m\imath$, para un cierto entero $m \neq 0$, entonces se tendría $h(\breve{z}) = e^{k(\breve{z})} = 1$. Como h solo toma el valor 1 en $z = 0$, esto nos dice que ha de ser $\breve{z} = 0$. Por la elección tendríamos $k(\breve{z}) = k(0) = 0$. Es decir, $m = 0$; lo que supone una contradicción. Por tanto, k omite $2\pi\imath(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

En realidad, nos basta, en lo que resta, con saber que k omite un par de valores concretos, como por ejemplo $2\pi\imath$ y $-2\pi\imath$.

Finalmente, sea l la función dada por

$$l(z) = \frac{k(z)}{4\pi\imath} + \frac{1}{2}\,.$$

La función l es holomorfa en $\mathbb{D}$ y omite $\{0, 1\}$ y $l(0) = 1/2$.

El corolario 4.42 nos dice que

$$|l'(0)| \leq \Psi(1/2)\,,$$

de donde, como $h(0) = 1$, se deduce que

$$\frac{1}{|b|} = |h'(0)| = |k'(0)| = 4\pi|l'(0)| \leq 4\pi\Psi(1/2)\,,$$

y, por tanto,

$$|b| \geq \frac{1}{4\pi\Psi(1/2)} \triangleq A\,.$$

■

4.8. Teorema grande de Picard

El teorema grande de Picard se puede ver como una generalización del teorema que hemos llamado pequeño de Picard, como extensión del teorema de Casorati–Weierstrass sobre singularidad esencial y como ampliación del teorema fundamental del álgebra.

Teorema 4.45 (Teorema grande de Picard) *Sea f una función holomorfa en $\Omega = \mathbb{D}(b, r) \setminus \{b\}$, donde $b \in \mathbb{C}$ y $r > 0$. Si f tiene en b una singularidad esencial, entonces f toma en Ω infinitas veces cada valor complejo salvo a lo sumo un valor excepcional.*

La conclusión del teorema grande de Picard se puede escribir

$$\#\big\{w \in \mathbb{C} : \#\{f^{-1}(w)\} < +\infty\big\} \leq 1\,.$$

La función $f(z) = e^{1/z}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, tiene singularidad esencial en 0 y omite el valor 0, así que un valor excepcional sí es posible. El teorema de Picard dice que no puede haber 2 de ellos. Y no sólo no puede haber 2 valores omitidos, sino que ni siquiera pueda haber 2 valores que sólo se toman un número finito de veces.

El teorema afirma que $f(\mathbb{D}(b,\delta)) = \mathbb{C}$ para todo $\delta > 0$ o que existe un $a \in \mathbb{C}$ tal que $f(\mathbb{D}(b,\delta)) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$. El teorema de Casorati–Weierstrass tan sólo afirma que $f(\mathbb{D}(b,\delta))$ es denso en $\mathbb{C}$.

DEMOSTRACIÓN. Procedemos por reducción al absurdo: vamos a demostrar que si el número de valores excepcionales es al menos 2, entonces f tiene en b un polo o una singularidad evitable.

Normalicemos. Sin pérdida de generalidad (y sucesivamente),

- podemos suponer que el 0 y el 1 son valores excepcionales (si α y β son excepcionales para f, entonces 0 y 1 lo son para $(f-\alpha)/(\beta-\alpha)$);
- podemos suponer, reduciendo r si es preciso, que f no toma los valores excepcionales 0 y 1 en $\mathbb{D}(b,r) \setminus \{b\}$;
- podemos suponer, considerando $z \mapsto f(b+rz)$, que $\Omega = \mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Así que tenemos una función f holomorfa en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ con valores en $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, y queremos probar que f tiene en 0 un polo o una singularidad evitable.

Si $\lim_{z\to 0} |f(z)| = +\infty$, entonces f tiene un polo en 0.

Si f no tiene un polo en 0, entonces existe una sucesión de puntos $(z_n)_{n\geq 1}$ tal que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 0$, pero $\sup_{n\geq 1} |f(z_n)| < +\infty$. Podemos suponer que $(|z_n|)_{n\geq 1}$ decrece estrictamente hacia 0 y además que $|z_1| < e^{-\pi}$.

Aspiramos a probar en este caso que $|f|$ está acotada en un entorno de 0 y, por tanto, que tiene una singularidad evitable en 0.

Por compacidad podemos suponer que $f(z_n)$ tiene límite finito, digamos $a = \lim_{n\to\infty} f(z_n)$, y cambiando f por $1-f$, si hiciera falta, podemos suponer que $a \neq 0$. Tomando de nuevo una subsucesión, si hiciera falta, podemos suponer que

$$|a|/2 \leq |f(z_n)| \leq 2|a|\,, \quad \text{para cada } n \geq 1\,.$$

Para cada $n \geq 1$, escribamos $z_n = r_n e^{\imath\theta_n}$, con $r_n > 0$ y $\theta_n \in [-\pi,\pi]$, y consideremos la función holomorfa en $\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C} : \Re(w) > 0\}$ dada por

$$g_n(w) = \exp\big(\ln(r_n) w\big)\, e^{\imath\theta_n} = r_n^w\; e^{\imath\theta_n}.$$

Obsérvese que $|g_n(w)| = r_n^{\Re(w)}$, para cada $w \in \mathbb{H}$ y que $g_n(1) = z_n$.

Nótese además que, para cada $n \geq 1$, se tiene que $g_n(\mathbb{H}) = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ y que

$$\{g_n(1+\imath y) : |y| \leq 1\} = \partial\mathbb{D}(0,r_n)$$

para cada n tal que $\ln(1/r_n) > \pi$, es decir, para todo $n \geq 1$.

Considérese ahora la sucesión $(h_n)_{n\geq 1}$ de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ dadas por

$$h_n = f \circ g_n \circ T\,.$$

donde T es la trasformación de Möbius $T(u) = \frac{1+u}{1-u}$.

Cada h_n es holomorfa en $\mathbb{D}$ y omite $\{0,1\}$. Además $h_n(0) = f(g_n(1)) = f(z_n)$. Así que

$$(a/2) \leq |h_n(0)| \leq 2a\,, \quad \text{para cada } n \geq 1\,.$$

Por el teorema de Schottky, teorema 4.41, tenemos que

$$|h_n(u)| \le C(a,s)\,, \quad \text{si } |u| \le s, n \ge 1\,.$$

Tomamos $s_0 = 1/\sqrt{5}$. La razón de esta elección es porque

$$T(\mathbb{D}(0,s_0)) \supset \{1 + \imath y : |y| \le 1\}\,.$$

Por tanto,

$$g_n(T(\mathbb{D}(0,s_0)) \supset \partial\mathbb{D}(0,r_n) \qquad \text{para todo } n \ge 1.$$

Por consiguiente, para cada $n \ge 1$ se tiene que

$$f(\partial\mathbb{D}(0,r_n)) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,R))$$

donde $R = C(a,s_0)$. Por el principio de módulo máximo, para cada $n \ge 1$ se tiene que

$$f(\{z : r_n \le |z| \le r_1\}) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,R))\,,$$

de donde

$$f(\mathbb{D}(0,r_1) \setminus \{0\}) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,R))\,.$$

En otros términos,

$$|f(z)| \le R\,, \quad \text{para cada } z \in \mathbb{D}(0,r_1) \setminus \{0\}\,.$$

La conclusión (y contradicción) es que f tiene una singularidad evitable en 0. ■

El teorema pequeño de Picard se sigue directamente del grande, pero, de hecho, con una conclusión más fuerte.

Corolario 4.46 (Teorema pequeño de Picard reforzado) *Sea f una función entera no constante. Entonces*

i) *Si f es un polinomio, entonces f toma un número finito de veces cada valor en $\mathbb{C}$.*

ii) *Si f no es un polinomio, entonces f toma cada valor de $\mathbb{C}$, salvo a lo sumo una excepción, un número infinito de veces.*

Basta apuntar que si f no es polinomio, entonces f tiene una singularidad esencial en $\infty_{\mathbb{C}}$, o si se prefiere, $f(1/z)$ tiene una singularidad esencial en 0.

En otros términos, si f no es polinomio, para cada $b \in \mathbb{C}$, salvo a lo sumo una excepción, se tiene una sucesión z_n tal que $|z_n| \to \infty$ y tal que $f(z_n) = b$, para cada $n \ge 1$.

Si f es un polinomio no constante (así que su grado es al menos 1), el teorema fundamental del álgebra da que para todo $a \in \mathbb{C}$ se cumple que $\#\{f^{-1}(a)\} =$ grado de f, y, por tanto,

$$\#\{f^{-1}(a)\} \ge 1\,, \quad \text{para todo } a \in \mathbb{C}\,.$$

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 4

Lema de Schwarz

4.8.1 *Compruébese que si una función f holomorfa en $\mathbb{D}$ con $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ fija dos puntos, es decir, $f(a) = a$ y $f(b) = b$ para $a, b \in \mathbb{D}$, $a \neq b$, entonces f es la identidad ($f(z) = z$, para todo $z \in \mathbb{D}$).*

4.8.2 *Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$ y tal que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Sabemos que*

$$|f(0)|^2 + |f'(0)|^2 \leq 1\,.$$

Demuéstrese que

$$|f(0)|^2 + |f'(0)| \leq 1\,.$$

Sugerencia. Si $f(0) = a$, aplíquese el lema de Schwarz usual a $S_a \circ f$.

4.8.3 ***Ampliación del lema*** 4.4. *Demuéstrese que si f es holomorfa en un dominio Ω y es tal que $f(\Omega) \subset \mathbb{D}(0, M)$, entonces para todo $a \in \Omega$ se tiene que*

$$\operatorname{dist}(a, \partial\Omega)|f'(a)| \leq M - \frac{|f(a)|^2}{M}\,.$$

4.8.4 *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$, con imagen $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y que se anula en los puntos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de $\mathbb{D}$. Pruébese que*

$$|f(z)| \leq \prod_{j=1}^{n} \Big|\frac{z - a_j}{1 - z\,\overline{a}_j}\Big|, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Compruébese además que si $a_1 = 0$ (es decir, si $f(0) = 0$), entonces $|f'(0)| \leq \prod_{j=2}^{n} |a_j|$.

Sugerencia. Obsérvese que $B(z) = \prod_{j=1}^{n} \dfrac{z - a_j}{1 - z\,\overline{a}_j}$ es holomorfa en $\overline{\mathbb{D}}$ y que si $|z| = 1$ entonces $|B(z)| = 1$. Considérese la función $f(z)/B(z)$.

4.8.5 *Sea $\mathcal{F}$ la familia de todas las funciones holomorfas f en $\mathbb{D}$ que satisfacen las condiciones siguientes:*

1) $\Re(f(z)) > 0$, *para todo $z \in \mathbb{D}$,*

2) $f(1/2) = 1$ *y* $f'(1/2) = 0$,
3) $f(-1/2) = 1$ *y* $f'(-1/2) = 0$,
4) $f(0) = 1$.

Hállese

$$\text{máx}\{|f'(0)|\,, f \in \mathcal{F}\}\,.$$

4.8.6 LEMMA DE BOREL–CARATHÉODORY. a) *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$ tal que $f(0) = 0$ y tal que para una cierta constante $A > 0$ se cumple $\Re f(z) \leq A$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Demuéstrese que*

$$|f(z)| \leq \frac{2A|z|}{1-|z|}\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

b) *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$ tal que para una cierta constante $A \in \mathbb{R}$ (no necesariamente positiva) se cumple $\Re f(z) \leq A$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Demuéstrese que*

$$|f(z)| \leq \frac{2A|z|}{1-|z|} + |f(0)|\frac{1+|z|}{1-|z|}\,, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}\,.$$

Sugerencia. Para la segunda parte considérese la función g dada por $g(z) = f(z) - f(0)$.

4.8.7 *Demuéstrese que si f es una función holomorfa en $\mathbb{D}$ que tiene imagen $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}$, entonces se cumple que*

$$|f'(0)| \leq 2\,|f(0)|\,\ln\Big(\frac{1}{|f(0)|}\Big)\,.$$

Dedúzcase que si f holomorfa en $\mathbb{D}$ es tal que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y $f(0) = 1/2$ y $|f'|(0) > \ln(2)$, entonces f se anula en algún punto de $\mathbb{D}$

Sugerencia. Considérese $g(z) = \ln(1/f(z))$, que toma valores en el semiplano $\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C}; \Re w > 0\}$.

4.8.8 *Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$, tal que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}$ y tal que $f(0) = 1/e$. Compruébese que para todo $z \in \mathbb{D}$ se cumple que*

$$\frac{|z|+1}{|z|-1} \leq \ln|f(z)| \leq \frac{|z|-1}{|z|+1}\,.$$

4.8.9 *Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$, tal que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Compruébese que si $f(0)$ es real y positivo, entonces f no toma valores reales negativos en el disco $\mathbb{D}(0, r)$ donde*

$$r = -\ln\big(\text{argsenh}\big((2/\pi)\ln(1/f(0))\big)\big)\,,$$

4.8.10 *Demuéstrese que si f es un función holomorfa en $\mathbb{U}$ y con valores en $\mathbb{U}$ entonces*

$$\Big|\frac{f(z)-f(w)}{f(z)-\overline{f(w)}}\Big| \le \Big|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\Big|, \quad \textit{para todo } z, w \in \mathbb{U},\ z \neq w\,,$$

y que

$$|f'(z)| \le \frac{\Im(f(z))}{\Im(z)}, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{U}\,.$$

Teorema de Bloch

El teorema de Bloch afirma que si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ entonces $f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}(*, |f'(0)|/4)$, donde $*$ es un punto indeterminado de $f(\mathbb{D})$.

4.8.11 *Considérese para cada $n \in \mathbb{N}$, la función*

$$f_n(z) = \frac{e^{nz}-1}{n}\,,$$

para comprobar que la conclusión del teorema de Bloch no se puede sustituir por $f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}\big(f(0), A|f'(0)|\big)$, donde A es una constante absoluta.

4.8.12 *Demuéstrese, sin embargo, que existe una constante absoluta $A > 0$ tal que si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y tal que el valor $f(0)$ se toma sólo en $z = 0$, entonces*

$$f(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}\big(f(0), A|f'(0)|\big)\,.$$

Sugerencia. Obsérvese que se puede suponer $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Sea $b \in \mathbb{C}\setminus f(\mathbb{D})$. Considérese $g(z) = 1 - f(z)/b$ y $h(z) = \ln g(z)$, con $h(0) = 0$. Obsérvese que h omite $\{2k\pi i; k \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$. Aplíquese Schottky. Dedúzcase una cota para $|h'(0)|$. Conclúyase.

Teoremas de Picard

4.8.13 *Compruébese que el teorema (pequeño) de Picard es (lógicamente) equivalente al enunciado siguiente:*

> *Si f y g son dos funciones enteras tales que $e^{f(z)} + e^{g(z)} = 1$, para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces f y g son constantes.*

4.8.14 *Sean f y g dos funciones enteras tales que*

$$f(z) \neq g(z) + 1$$
$$f(z) \neq g(z) - 1$$

Compruébese que si además $f(0) = g(0)$ entonces $f \equiv g$.

4.8.15 VERSIÓN CUANTITATIVA DEL TEOREMA PEQUEÑO DE PICARD. *Demuéstrese que para cada $a, b \in \mathbb{C}$, con $b \neq 0$, existe una constante $L(a,b) > 0$, tal que toda función holomorfa en $\mathbb{D}(0,R)$ con $R > L(a,b)$ que cumple*

$$f(0) = a, \quad f'(0) = b\,,$$

ha de tomar el valor 0 o el valor 1 en $\mathbb{D}(0,R)$.

Sugerencia. Supóngase que f omite 0 y 1 en $\mathbb{D}(0,R)$. Considérese $g(z) = f(Rz)$ definida en $\mathbb{D}$. Acótese $|g(z)|$ en $|z| \leq 1/2$ por Schottky. Acótese $|g'(0)|$. Conclúyase.