[Los problemas con un número entre corchetes están adaptados de los correspondientes en los apuntes de José Luis Fernández.]

1) Prueba que si $a_{2n}x^{2n}+\cdots+a_2x^2+a_0 = a_{2n}(x^2-r_1^2)\cdots(x^2-r_n^2)$ con $a_{2n}, a_0 \neq 0$ entonces $\sum_{k=1}^n r_k^{-4} = (a_2^2 - 2a_4a_0)/a_0^2$. Utiliza este resultado para obtener el valor de $\zeta(4)$ siguiendo el argumento no riguroso de Euler.

2) Comprueba que los productos parciales de $\prod_{n=2}^\infty(1-n^{-1})$ tienden a cero y por tanto el producto no converge. Comprueba también que $\prod_{n=1}^\infty(1-(-1)^n n^{-1})$ converge pero no absolutamente.

3) [7.8.1] Prueba la identidad $\prod_{n=2}^\infty(1-n^{-2}) = 1/2$.

4) Encuentra una fórmula sencilla para $\prod_{n=0}^\infty\big(1+z^{2^n}\big)$ en el disco unidad. Indicación: Piensa en la expresión de cada número natural en base dos.

5) Usando la fórmula del triple producto de Jacobi expresa $\sum_{n=1}^\infty q^{2n-1}/\big(1+q^{4n-2}\big)$ en términos de $f(1/4)$ con $f(z) = \theta'(z)/\theta(z)$.

6) Demuestra que el producto de dos funciones de orden ρ tiene a lo más orden ρ y da un ejemplo en el que no se dé la igualdad.

7) Prueba que f y f' tienen el mismo orden. Indicación: Usa la fórmula integral de Cauchy.

8) Calcula la factorización de Hadamard de e^z-1 y de $\operatorname{senh}(\pi z)$.

9) [7.8.13] Halla una fórmula explícita para la función entera $f(z) = \prod_{n=1}^\infty(1+z^4/n^4)$ y utiliza el resultado para calcular $\prod_{n=1}^\infty(1+n^{-4})$.

10) Demuestra $t\big|\Gamma(it)\big|^2 = \pi/\sinh(\pi t)$ para $t \in \mathbb{R}-\{0\}$.

11) Se llama *función digamma* a $D(s) = \Gamma'(s)/\Gamma(s)$. Expresa D como una suma infinita y utilízala para probar $D(1)-D(1/2) = \log 4$. Indicación: Recuerda $1-1/2+1/3-1/4+\cdots = \log 2$ por el desarrollo de $\log(1+x)$.

12) Expresa la *función beta* $B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ como un producto infinito y tomando $x = y = 1/2$ deduce el *producto de Wallis* $\pi = 4\prod_{n=1}^\infty 2n(2n+2)(2n+1)^{-2}$. Indicación: Recuerda o prueba que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

13) [8.5.13] Si f es una función entera de orden $3/2$ cuyo desarrollo de Taylor es de la forma $20+19z+\sum_{k=2}^\infty a_kz^k$, calcula la función $g(z)$ que aparece en la exponencial en su factorización de Hadamard.

14) Comprueba que $f(s) = \Gamma(s)\Gamma(s+1/2)/\Gamma(2s)$ es entera (salvo singularidades evitables) y sabiendo que es de orden 1 prueba la *fórmula de duplicación* $f(s) = \sqrt{\pi}2^{1-2s}$. Indicación: ¿Tiene ceros? Calcula $f(0)$ y $f'(0)/f(0)$.