[Los problemas con un número entre corchetes están adaptados de los correspondientes en los apuntes de José Luis Fernández. $\mathbb{D}$ es el disco abierto unidad.]

1) Halla $f_n : \Omega = \{z : \Re(z) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f_n \rightrightarrows f$ sobre compactos de Ω pero que no converja uniformemente en todo Ω.

2) [5.6.3] Para $f_n(z) = \tan(nz)$, estudia si la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge uniformemente sobre los compactos del semiplano inferior $\{\Im(z) < 0\}$.

3) Sea f_n una sucesión de funciones holomorfas definidas en un abierto y $g_n = n^{-1}\sum_{k=1}^n f_k$. Demuestra que si $f_n \rightrightarrows f$ sobre compactos entonces también $g_n \rightrightarrows f$ sobre compactos.

4) Si con la notación del ejercicio anterior tomamos $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$, comprueba que f_n no converge en el compacto $[-1,0]$ mientras que g_n lo hace uniformemente. Indicación: $(1-z)f_n(z)$ y $(1-z)^2 g_n(z)$ son polinomios sencillos.

5) [5.6.1] Demuestra que si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ (holomorfas en Ω) converge uniformemente en cada circunferencia incluida en Ω a cierta $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, entonces $f_n \rightrightarrows f$ sobre cualquier compacto en Ω. Indicación: Utiliza la fórmula integral de Cauchy.

6) Prueba que $F(z) = \sum_{n=0}^\infty n^2 e^{n/z}$ es holomorfa en $\{\Re(z) < 0\}$ y halla el valor explícito de $F(-1)$.

7) Prueba que si $|a_n| \le (\log n)^{2019}$ la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-z}$ converge y define una función holomorfa en $\{\Re(z) > 1\}$.

8) Halla $f_n : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ con $f_n \rightrightarrows f$ sobre compactos de modo que cada f_n tenga algún cero en $\mathbb{D}$ y que f no tenga ninguno. Indicación: Haz que los ceros de las f_n vayan hacia $\partial\mathbb{D}$.

9) [5.6.12] Demuestra que si $\mathcal{F}$ es una familia normal, entonces $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ también lo es y busca un contraejemplo para el recíproco.

10) Dada f entera y $a \in \mathbb{C}$ arbitrario, considera la familia $\mathcal{F} = \{f(a+nz) : n \in \mathbb{Z}^+\}$. Utilizando el teorema de Montel y el ejercicio anterior deduce que si f estuviera acotada entonces $f'(a) = 0$, consiguiendo de esta manera una prueba enrevesada del teorema de Liouville.

11) [5.6.14] Sea $\mathcal{F}$ la familia de funciones holomorfas $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $|f^{(n)}(0)| < 2019$ (por ejemplo la exponencial). Demuestra que $\mathcal{F}$ es una familia normal. Indicación: Piensa en su serie de Taylor.

12) Prueba $\zeta(-1) = -1/12$ aplicando $\operatorname{Res}\big(z^{-2}(e^z-1)^{-1}, 0\big) = 1/12$ a la integral sobre C_δ. Si uno utilizase la serie, esto daría el absurdo $1+2+3+4+\cdots = -1/12$ que es una fórmula que envió Ramanujan a un matemático como uno de sus descubrimientos.

13) Demuestra la fórmula $\zeta(s) = s/(s-1) - s\int_1^\infty x^{-s-1}\operatorname{Frac}(x)\,dx$ donde Frac es la parte fraccionaria y explica por qué prueba la extensión meromorfa a $\Re(s) > 0$ con un único polo en $s = 1$. Indicación: Integra en $[n, n+1]$ y usa $\sum n(n+1)^{-s} = \sum (n+1)^{1-s} - \sum (n+1)^{-s}$.

14) Integrando por partes prueba $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Halla también una fórmula simple para el residuo de $\Gamma(s)$ en $s = -2019$.

15) Calcula el residuo de $\Gamma^2(s)\operatorname{sen}(\pi s)$ en $s = -2$.

16) La *constante de Euler-Mascheroni* es $\Gamma'(1)$. Prueba que es igual a $-\int_0^1 \log\log\left(x^{-1}\right)\,dx$.

17) Prueba la fórmula $\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)n^{-s}$ para $s > 1$ donde $d(n)$ es el número de divisores (positivos) de n. Indicación: Nota que si n factoriza en primos como $p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ entonces se tiene $d(n) = d(p_1^{\alpha_1})\cdots d(p_k^{\alpha_k}) = (\alpha_1+1)\cdots(\alpha_k+1)$, escribe la serie del segundo miembro como $\prod_p \left(1+2p^{-s}+3p^{-2s}+4p^{-3s}+\dots\right)$ donde p recorre los primos y utiliza $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \left((1-x)^{-1}\right)'$.

18) Demuestra que para $x \ge 0$ la integral $\int_L s^{-1}(s+1)^{-1}x^{s+1}\,ds$ es $2\pi i \max(0, x-1)$ para cualquier recta vertical L en el semiplano derecho $\Re(s) > 0$ orientada hacia arriba.

19) A partir del ejercicio anterior, prueba que para $x > 0$ la suma $\sum_{n\le x}(x-n)\Lambda(n)$ es igual a $-\frac{1}{2\pi i}\int_L s^{-1}(s+1)^{-1}x^{s+1}\zeta'(s)/\zeta(s)\,ds$ con L una recta vertical como antes pero ahora en el semiplano $\Re(s) > 1$.

20) Decide si las sumas $\sum \operatorname{sen}(p^{-1})$ y $\sum (p\log p)^{-1}$ convergen, donde p recorre los primos.