

1) Sean $u_+ = x^2 + y^2 + 2x + 2y$ y $u_- = x^2 - y^2 + 2x - 2y$. Estudiar si existen funciones enteras f_+ y f_- tales que $\Re f_{\pm}(x + iy) = u_{\pm}(x, y)$. Si alguna de ellas existe, escribe una fórmula explícita.

2) Halla el desarrollo de Taylor de $f(z) = \frac{z}{z^4+2}$ centrado en $z_0 = 0$. ¿Cuál es su radio de convergencia?

3) Halla una fórmula explícita para la función entera definida por $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!} z^n$ y usa el resultado para calcular $\frac{n^3}{n!}$. **Indicación:** Escribe n^3 como $An(n-1)(n-2) + Bn(n-1) + Cn$.

4) Si f es meromorfa con un polo de orden N en z_0 , ¿cuál es el residuo de f'/f en z_0 ?

5) Calcula el residuo $\text{Res}(f, i)$ de la función $f(z) = (z^2 + 1)^{-2}$.

6) Calcula c_{-1} , c_0 y c_1 , en el desarrollo de Laurent $c_{-1}/z + c_0 + c_1z + \dots$ de $f(z) = (e^z - 1)^{-1}$.

7) Calcula $\int_C f(z) dz$ para $f(z) = (z^2 + az + 1)^{-1}$ donde $a > 2$ y C es la circunferencia unidad.

8) Evalúa $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+a^4} dx$ donde $a = \pi k\sqrt{2}$ con $k \in \mathbb{Z}^+$ utilizando el teorema de los residuos. **Indicación:** Para simplificar los cálculos es conveniente notar que $e^{i(\pm 1+i)\pi k} = e^{-\pi k}(-1)^{k-1}$ y $(1+i)^{-3} + (-1+i)^{-3} = -i/2$.

9) Usando $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - 1/e^{it})$ y $dt = d(e^{it})/(ie^{it})$, escribe $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+4\sin t}$ como $\int_C f(z) dz$ donde C es la circunferencia unidad y f una función meromorfa. Evalúa con ello la integral.

10) Deduce del teorema de Rouché que las 11 soluciones de $z^{11} + z^4 - z^3 + z - 2018 = 0$ están en el círculo $\{|z| < 2\}$.

11) Si f es holomorfa en un abierto $\mathcal{U} \supset \bar{D}$ y no se anula en D , prueba que el mínimo de $|f(z)|$ en \bar{D} se alcanza en la frontera ∂D . Es decir, que también hay un *principio del módulo mínimo* si no hay ceros.

12) Prueba que si una función entera satisface $|f(z)| < C|z|^n$ en $|z| > 1$ para cierta constante C , entonces es un polinomio. **Indicación:** Considera $f(z)/z^n$ y réstale algo para que sea entera y se pueda aplicar el teorema de Liouville. Otra posibilidad es usar la fórmula integral de Cauchy para $f^{(n+1)}$.

13) Prueba que no existe ninguna función entera f que satisfaga la ecuación funcional $f(z^4) - f(z) = 2018z$. **Indicación:** Halla su desarrollo en serie de potencias y muestra que su radio de convergencia es finito.

14) Sabiendo que la función $f(z) = z^{-2}(e^{2\pi iz} - 1)^{-1}$ cumple $\text{Res}(f, 0) = i\pi/6$, aplica el teorema de los residuos a $\int_{\partial D} f(z) dz$ donde D es el cuadrado $|x| < N + 1/2$, $|y| < N + 1/2$ con N entero $N \rightarrow +\infty$ para obtener $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$.