

Nombre y apellidos.....

.....

1) [2 puntos] Escribe el enunciado preciso del teorema que más te haya gustado del curso. Si es posible di algo acerca de su prueba o de sus aplicaciones.

2) Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas incluyendo en cada caso una pequeña justificación.

a) [1 punto] La función  $f(z) = \cos(\theta(z))$  tiene infinitos polos.

b) [1 punto] El producto  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2019^{-n} n^3 z)$  define una función entera.

3) [2 puntos] Sea  $f_n(z) = \tan(nz)$ . Estudia si la sucesión  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge uniformemente sobre los compactos del semiplano inferior  $\{\Im(z) < 0\}$ .

4) [2 puntos] Halla  $A, B, C \in \mathbb{C}$  tales que  $\wp''' = A\wp\wp' + B\wp + C$ . Indicación: Nota que  $\wp$  es una función par y solo con eso podrás calcular algunos de los coeficientes.

5) [2 puntos] Calcula razonadamente el residuo en  $s = -3$  de  $(e^{s+3} + \cos(\pi s))\Gamma^2(s)$ .

Algunas fórmulas

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \quad \text{para } \Re(s) > 0, \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{para } \Re(s) > 1,$$

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2\pi i n z} \quad \text{con } q = e^{\pi i \tau}, \quad \Im \tau > 0, \quad \wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left( \frac{1}{(z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$