Examen final 24/May/2019 Variable Compleja II

Nombre y apellidos ....

....

1) [2 puntos] Escribe el enunciado preciso del teorema que más te haya gustado del curso. Si es posible di algo acerca de su prueba o de sus aplicaciones.

2) Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas incluyendo en cada caso una pequeña justificación.

a) [1 puntos] La función $20/\big(\wp^{(4)}(z)+19\big)$ es una función racional de $\wp(z)$.

b) [1 puntos] La función $\zeta'(s)\,\mathrm{sen}^2(2019\pi s)$ es entera.

c) [0.5 puntos] El producto $\prod_{n=1}^{\infty}\big(1+n^{-3}\big)$ converge.

3) [2 puntos] Demuestra la relación $\theta(z+\tau)=q^{-1}e^{-2\pi iz}\theta(z)$ a partir de la definición de θ. Sea $P(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\big(1+q^{2n-1}e^{2\pi iz}\big)\big(1+q^{2n-1}e^{-2\pi iz}\big)$. Prueba que $f(z)=P(z)/\theta(z)$ es una función elíptica con $f(z)=f(z+1)=f(z+\tau)$.

4) [1.5 puntos] Sea $\mathcal{H}$ el conjunto de funciones holomorfas $f:\{|z|<1\}\longrightarrow\mathbb{C}$ y sean los subconjuntos $\mathcal{F}_1=\{f\in\mathcal{H}\,:\,|f^{(k)}(0)|\le 1,\ \forall k\ge 0\}$, $\mathcal{F}_2=\{f\in\mathcal{H}\,:\,|f(0)|\le 1\}$ y $\mathcal{F}_3=\{f'\,:\,f\in\mathcal{H}\text{ con }|f(z)|\le 1\text{ para }|z|<1\}$. Estudia si son familias normales[1].

5) [2 puntos] Demuestra que $\Gamma(s+2)=(s+1)\Gamma(s+1)$ para $-s\notin\mathbb{Z}^+$. Sabiendo que $\zeta(2)=\pi^2/6$, calcula los residuos en $s=-2$ de $\zeta(-s)\Gamma(s)$ y de $\mathrm{sen}(\pi s)\Gamma^2(s)$.

Algunas fórmulas

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-x}\,dx\quad\text{para }\Re(s)>0,\qquad \zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\quad\text{para }\Re(s)>1,$$

$$\theta(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}e^{2\pi inz}\quad\text{con}\quad q=e^{\pi i\tau},\quad \Im\tau>0,\qquad \wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\in\Lambda^*}\Big(\frac{1}{(z+\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\Big).$$

[1] Recuerda: una familia es *normal* si toda sucesión tiene una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos.