Enunciado

1) Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas incluyendo en cada caso una pequeña justificación.

a) [2 puntos] La suma de dos funciones enteras de orden 2019 tiene a lo más orden 2019.

b) [2 puntos] El producto $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+n^{-3}\right)$ converge.

2) [3 puntos] Demuestra $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(2^{-n}z\right)=z^{-1}\operatorname{sen} z$ para $z/\pi\notin\mathbb{Z}$. Indicación: Usa en los productos parciales $2\cos x=\operatorname{sen}(2x)/\operatorname{sen} x$.

3) [3 puntos] Demuestra $\pi\left|\Gamma(it)\right|^{-2}=t\operatorname{senh}(\pi t)$ para $t\in\mathbb{R}-\{0\}$. Indicación: Recuerda que $\operatorname{senh} x=(e^{x}-e^{-x})/2$ y $\operatorname{sen} x=(e^{ix}-e^{-ix})/(2i)$.

Solución

1) a) (V) Si f y g tienen orden 2019 entonces el segundo miembro de la desigualdad: $|f(z)+g(z)|e^{-|z|^{\rho}}\le|f(z)|e^{-|z|^{\rho}}+|g(z)|e^{-|z|^{\rho}}$ tiende a cero para $\rho>2019$ y por tanto el primero también (ya que es no negativo).

b) (V) Como $\sum n^{-3}<\infty$, el producto converge absolutamente y por tanto converge.

2) Según la identidad de la indicación, el N-ésimo producto parcial es

$$P_N(z)=\prod_{n=1}^{N}\cos\left(2^{-n}z\right)=\prod_{n=1}^{N}\frac{\operatorname{sen}\left(2^{-n+1}z\right)}{2\operatorname{sen}\left(2^{-n}z\right)}=\frac{1}{2^N}\prod_{n=1}^{N}\frac{\operatorname{sen}\left(z/2^{n-1}\right)}{\operatorname{sen}\left(z/2^{n}\right)}=\frac{\operatorname{sen} z}{2^N\operatorname{sen}(z/2^N)}.$$

El último paso se debe a que el producto es telescópico. Sabemos que $\epsilon^{-1}\operatorname{sen}(\epsilon z)\to z$ cuando $\epsilon\to 0$, así que tomando $\epsilon=2^{-N}$ se sigue que el límite de $P_N(z)$ cuando $N\to\infty$ es $z^{-1}\operatorname{sen} z$ y no es nulo en el rango indicado.

Extra. Tomando $z_N=2^{N+1}\pi$ se tiene $P_N(z_N)=1$ mientras que $z_N^{-1}\operatorname{sen} z_N=0$ por tanto no se cumple que el supremo de $|P_N(z)-z^{-1}\operatorname{sen} z|$ tienda a cero cuando $N\to\infty$.

3) Con la fórmula de la indicación $\operatorname{senh}(\pi t)=-i\operatorname{sen}(\pi it)$. La fórmula de factorización del seno implica que el segundo miembro es

$$t\operatorname{senh}(\pi t)=-it\cdot\pi it\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{(\pi it)^2}{\pi^2n^2}\right)=\pi t^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{n^2}\right).$$

Por otro lado, por la factorización de $1/\Gamma$ el primer miembro es

$$\frac{\pi}{|\Gamma(it)|^2} = \pi\big|ite^{\gamma it}\big|^2 \prod_{n=1}^{\infty}\Big|\Big(1+\frac{it}{n}\Big)e^{-it/n}\Big|^2 = \pi t^2 \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{t^2}{n^2}\Big)$$

donde se ha usado que t es real para asegurar $|e^{i\gamma t}| = |e^{-it/n}| = 1$.

Criterios de corrección y comentarios

1) a) No se puede asegurar que el orden sea exactamente 2019 como muestra el contraejemplo tonto $f(z) = \exp(z^{2019})$, $g(z) = 1 - f(z)$.

b) Una cosa tonta de terminología (por supuesto no penalizada): se llama *serie armónica* a $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ no a cualquiera de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^k$. Como es algo medianamente extendido en vuestros exámenes, supongo que algún profesor os lo dijo pero suena muy extraño. En este apartado cualquier argumento que emplee que $\sum n^{-3}$ no converge no cuenta nada. Eso es un error serio.

2) Aquí es relativamente frecuente tener problemas para calcular el límite de $\frac{\sin(2^{-n}z)}{2^{-n}z}$. Si uno quiere aplicar L'Hôpital, debe hacerlo en n o, como en la solución en $w = 2^{-n}z$ pero no se puede hacer en z porque no se está tomando ningún límite en z, es una constante cuando $n \to \infty$. Equivocarse en este límite descuenta dependiendo de la coherencia del argumento.

Varios intentáis resolver el problema usando la factorización del seno. Es posible repitiendo los pasos de la prueba "normal" cambiando sen por el producto pero es dar un rodeo raro y solo una persona lo ha conseguido. El resto hacen cosas que no tienen mucho sentido y aunque este procedimiento no es ilícito en sí solo han conseguido 0.25 o 0.5 por penalizaciones con argumentos incongruentes. Para mi sorpresa también hay dos o tres que hacen el límite indicado antes con la factorización de $\operatorname{sen}(z/2^n)$. No es penalizable pero sí muy extraño.

3) Este ejercicio es el 10) de la hoja 4. Se cumple la propiedad $\overline{\Gamma(s)} = \Gamma(\overline{s})$ y algunos la habéis probado y usado en la prueba aunque no es estrictamente necesaria. Por supuesto se puede hacer la factorización de $\operatorname{senh}(\pi z)$ aplicando el teorema de Hadamard pero la indicación era para que no lo tuvierais que hacer.