Tercer parcial 13/May/2019 Variable Compleja II

Nombre y apellidos ....

....

---

1) Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas incluyendo en cada caso una pequeña justificación.

a) [2 puntos] La suma de dos funciones enteras de orden 2019 tiene a lo más orden 2019.

b) [2 puntos] El producto $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+n^{-3}\right)$ converge.

2) [3 puntos] Demuestra $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(2^{-n}z\right)=z^{-1}\operatorname{sen} z$ para $z/\pi\notin\mathbb{Z}$. Indicación: Usa en los productos parciales $2\cos x=\operatorname{sen}(2x)/\operatorname{sen} x$.

3) [3 puntos] Demuestra $\pi\left|\Gamma(it)\right|^{-2}=t\operatorname{senh}(\pi t)$ para $t\in\mathbb{R}-\{0\}$. Indicación: Recuerda que $\operatorname{senh} x=(e^{x}-e^{-x})/2$ y $\operatorname{sen} x=(e^{ix}-e^{-ix})/(2i)$.

Algunas fórmulas

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=se^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{s}{n}\Big)e^{-s/n},\qquad \operatorname{sen} z=z\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{z^2}{\pi^2n^2}\Big)$$

$$\text{orden de } f=\rho(f)=\operatorname{ínf}\big\{\rho\,:\,\lim_{z\to\infty}|f(z)|e^{-|z|^{\rho}}=0\big\}.$$

Extra: Se añadirá 0.5 a tus puntos extra si explicas en el **2)** si hay convergencia uniforme o no en $\mathbb{C}-\{0\}$.

Tercer parcial 13/May/2019 Variable Compleja II

Name ....

....

---

1) Decide whether the following claims are true or false writing in each case a brief justification.

a) [2 points] The sum of two entire functions of order 2019 has order at most 2019.

b) [2 points] The product $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+n^{-3}\right)$ converges.

2) [3 puntos] Prove the identity $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(2^{-n}z\right)=z^{-1}\sin z$ for $z/\pi\notin\mathbb{Z}$. Hint: Use $2\cos x=\sin(2x)/\sin x$ in the partial products.

3) [3 puntos] Prove $\pi\left|\Gamma(it)\right|^{-2}=t\sinh(\pi t)$ for $t\in\mathbb{R}-\{0\}$. Hint: Remember $\sinh x=(e^x-e^{-x})/2$ and $\sin x=(e^{ix}-e^{-ix})/(2i)$.

Some formulas

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=se^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{s}{n}\Big)e^{-s/n},\qquad \sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{z^2}{\pi^2n^2}\Big)$$

$$\text{order of } f=\rho(f)=\text{ínf}\,\big\{\rho:\ \lim_{z\to\infty}|f(z)|e^{-|z|^\rho}=0\big\}.$$

Extra: You will get 0.5 extra points if you explain whether or not the convergence in **2)** is uniform in $\mathbb{C}-\{0\}$.