Enunciado

1) Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas incluyendo en cada caso una pequeña justificación. Aquí $\mathbb{D}$ indica el disco abierto unidad.

a) [1 punto] La sucesión $f_n(z) = nz^n e^{z/n}$ converge uniformemente en los compactos de $\mathbb{D}$.

b) [1.5 puntos] La función $\zeta'(s)\operatorname{sen}^2(2019\pi s)$ es entera.

c) [1.5 puntos] Sean $f, f_n : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfas. Si $f_n \rightrightarrows f$ sobre compactos y $1/f$ es holomorfa en $\mathbb{D}$, entonces $1/f_n$ también lo es para algún n.

2) [3 puntos] Calcula el residuo de $\Gamma^2(-s)\cos\left(\frac{\pi}{4}s\right)$ en $s = 2$.

3) [3 puntos] Demuestra que si una función entera cumple $|f'(z)| < 1 + |z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$ entonces es un polinomio cuadrático.

Solución

1) a) (V) Cualquier compacto K de $\mathbb{D}$ está incluido en un disco $\{|z| < r\}$ con $r < 1$ por tanto $\sup_{z\in K} |f_n(z) - 0| \le nr^n|e^{z/n}| = nr^n e^{\Re z/n}$. Como $\Re z < 1$ en $\mathbb{D}$, esto tiende a cero y se deduce $f_n \rightrightarrows 0$.

b) (V) Por la teoría sabíamos que $\zeta(s)$ tiene un único polo en $s = 1$ con residuo 1, por tanto $\zeta(s) - 1/(s-1) = h(s)$ con h entera. Así pues $\zeta'(s) + 1/(s-1)^2$ es entera y basta ver que $\big(\operatorname{sen}(2019\pi s)/(s-1)\big)^2$ define una función entera. Esto es así porque $\operatorname{sen}(2019\pi s)$ se anula en $s = 1$ y entonces la singularidad es evitable.

c) (F) La sucesión $f_n(z) = (z-1+n^{-1})/(z-1)$ cumple $|f_n(z)-1| = n^{-1}/|z-1|$, por tanto $f_n \rightrightarrows 1$ ya que $|z-1|^{-1}$ permanece acotado en cada compacto (porque está incluido en algún disco de radio $r < 1$). Se tiene que la función constante $1/1$ es holomorfa pero $1/f_n$ no lo es para ningún n porque f_n se anula en $1 - n^{-1} \in \mathbb{D}$.

2) Aplicando tres veces la ecuación funcional de Γ se tiene $\Gamma(3-s) = (2-s)(1-s)(-s)\Gamma(-s)$, por tanto la función del enunciado multiplicada por $s-2$ es

$$(s-2)\Big(\frac{\Gamma(3-s)}{(2-s)(1-s)(-s)}\Big)^2 \cos\big(\frac{\pi}{4}s\big) = \Big(\frac{\Gamma(3-s)}{(1-s)(-s)}\Big)^2 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}s\right)}{s-2}.$$

El último paréntesis al cuadrado tiende a $(\Gamma(1)/2)^2 = 1/4$ cuando $s \to 2$ y la última fracción tiende a $-\pi/4$ por la regla de l'Hôpital, por tanto el residuo es

$$\lim_{s\to 2}(s-2)\Gamma^2(-s)\cos\big(\frac{\pi}{4}s\big) = \frac{1}{4}\cdot\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) = -\frac{\pi}{16}.$$

Implícitamente hemos probado que hay un polo y que es simple (el límite sería 0 o ∞ si no lo hubiera o fuera de orden mayor).

3) La función $g(z) = (f'(z) - f'(0))/z$ tiene una singularidad evitable en el origen porque el numerador tiene un cero en $z = 0$ y entonces define una función entera. Además $|f'(z)| < |z| + 1$ asegura que está acotada, así pues el teorema de Liouville implica que g es constante, en particular $f'(z) = Cz + f'(0)$ e integrando se sigue la afirmación del enunciado.

Criterios de corrección y comentarios

1) a) La cota $|f_n(z)| \le n e^{\Re z/n}$ aunque es cierta, por supuesto no implica que $f_n(z) \to \infty$.

b) Un error extraño es que algunos decís que la derivada de $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ es $-s \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s-1}$. Recordad que la derivada de a^x es $a^x \log a$. Por otra parte, una derivada de ese tipo contradiría que $\zeta(s)$ tiene un polo en $s = 1$, como vimos en la teoría.

c) El teorema de Hurwitz dice que si f_n no se anulan, en particular si $1/f_n$ es holomorfa y f no es idénticamente nula, entonces f no se anula pero no afirma la implicación contraria.

2) No es válido decir que $\operatorname{Res}(f, a) = \operatorname{Res}(g, -a)$ cuando $g(z) = f(-z)$. Pensad en el caso $f(z) = (z-1)^{-1}$ que tiene residuo 1 en $z = 1$ mientras que $f(-z) = -(z+1)^{-1}$ tiene residuo -1 en $z = -1$. La fórmula correcta es $\operatorname{Res}(f, a) = -\operatorname{Res}(g, -a)$. El error de signo por este argumento penaliza -0.25. En un par de casos hay error de signo por un despiste con un argumento correcto, eso no penaliza.

3) Este ejercicio es un caso particular del 12) de la primera hoja y se resuelve como el tercero del primer parcial. Mencionar de alguna forma el teorema de Liouville cuenta 0.25. Razonamientos como los comentados en los criterios del primer parcial no son válidos y no puntúan pues muestran que no se ha consultado el examen anterior. Como algunos habéis observado, se pueden resolver con las desigualdades de Riemann (esto es lo mismo que derivar en la fórmula integral de Cauchy).

Algunos usáis $g(z) = \big(f(z) - f(0) - f'(0)z\big)/z^2$ u otras variantes. No decir correctamente cómo se podría probar que g está acotada sabiendo que $|f'| < 1 + |z|$, descuenta al menos 0.5.