Segundo parcial 10/Apr/2019 Variable Compleja II

Nombre y apellidos ....

....

---

1) Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas incluyendo en cada caso una pequeña justificación. Aquí $\mathbb{D}$ indica el disco abierto unidad.

a) [1 punto] La sucesión $f_n(z) = nz^n e^{z/n}$ converge uniformemente en los compactos de $\mathbb{D}$.

b) [1.5 puntos] La función $\zeta'(s)\operatorname{sen}^2(2019\pi s)$ es entera.

c) [1.5 puntos] Sean $f, f_n : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfas. Si $f_n \rightrightarrows f$ sobre compactos y $1/f$ es holomorfa en $\mathbb{D}$, entonces $1/f_n$ también lo es para algún n.

2) [3 puntos] Calcula el residuo de $\Gamma^2(-s)\cos\left(\frac{\pi}{4}s\right)$ en $s = 2$.

3) [3 puntos] Demuestra que si una función entera cumple $|f'(z)| < 1 + |z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$ entonces es un polinomio cuadrático.

Algunas fórmulas

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx \quad \text{para } \Re(s) > 0 \qquad \text{y} \qquad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \text{para } s \notin \mathbb{Z}_{\le 0}.$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \quad \text{para } \Re(s) > 1 \qquad \text{y} \qquad \zeta(s) = \frac{i}{2\Gamma(s)\operatorname{sen}(\pi s)} \int_{C_\delta} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\,dz \quad \text{para } s \notin \mathbb{Z}$$

donde C_δ, con $0 < \delta < 2\pi$ arbitrario, es una curva con forma de “cerradura” que viene desde $+\infty + i\delta$, rodea al origen y se dirige a $+\infty - i\delta$.

Name ....

....

---

1) Decide whether the following claims are true or false writing in each case a brief justification. Here $\mathbb{D}$ is the unit open disk.

a) [1 point] The sequence $f_n(z) = nz^n e^{z/n}$ converges uniformly on compact subsets of $\mathbb{D}$.

b) [1.5 points] The function $\zeta'(s)\operatorname{sen}^2(2019\pi s)$ is entire.

c) [1.5 points] Let $f, f_n : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ be holomorphic functions. If $f_n \rightrightarrows f$ on compact sets and $1/f$ is holomorphic on $\mathbb{D}$, then $1/f_n$ is also holomorphic for some n.

2) [3 points] Compute the residue of $\Gamma^2(-s)\cos\left(\frac{\pi}{4}s\right)$ at $s = 2$.

3) [3 points] Prove that if an entire function satisfies $|f'(z)| < 1 + |z|$ for all $z \in \mathbb{C}$ then it is a quadratic polynomial.

Some formulas

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx \quad \text{for } \Re(s) > 0 \qquad \text{and} \qquad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \text{for } s \notin \mathbb{Z}_{\le 0}.$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \quad \text{for } \Re(s) > 1 \qquad \text{and} \qquad \zeta(s) = \frac{i}{2\Gamma(s)\sin(\pi s)}\int_{C_\delta} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\,dz \quad \text{for } s \notin \mathbb{Z}$$

where C_δ, with $0 < \delta < 2\pi$ arbitrary, if the "keyhole" curve from $+\infty + i\delta$ to $+\infty - i\delta$ encircling the origin.
