Enunciado

1) Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas incluyendo en cada caso una pequeña justificación.

a) [1 punto] La serie de Taylor de $f(z) = z^{12}/(z^6+64)$ en $z_0 = 0$ tiene radio de convergencia igual a 1.

b) [1.5 puntos] La función $20/\big(\wp^{(4)}(z) + 19\big)$ es una función racional de $\wp(z)$.

c) [1.5 puntos] El residuo de $3\wp'(z)\Big(\dfrac{\operatorname{sen} z}{z}\Big)^{2019}$ en $z = 0$ es 2019.

2) [3 puntos] Demuestra

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n 5^{-2n^2} = \prod_{n=1}^{\infty}\big(1 + 5^{1-2n}\big)\big(1 - 5^{-n}\big).$$

Indicación. Utiliza la fórmula de triple producto de Jacobi con $q = 1/\sqrt{5}$.

3) [3 puntos] Demuestra que si una función entera cumple $|f(z)| < |z|^2 + 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $f''(0) = 0$, entonces es una función lineal $f(z) = az + b$.

Solución

1) a) (F) Las singularidades (los ceros del denominador) cumplen $|z| = 64^{1/6} = 2$, por tanto el radio de convergencia es 2. Otra forma es desarrollar $f(z) = 64^{-1}z^{12}/(1 + (z/2)^6)$ como $64^{-1}z^{12}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z/2)^{6n}$ y utilizar $R^{-1} = \limsup |a_n|^{1/n}$.

b) (V) Por ser elíptica, es de la forma $G(\wp) + \wp' H(\wp)$. Como $\wp$ es par, $\wp^{(4)}$ también lo es y entonces H debe ser nula (porque $\wp'$ es impar).

c) (V) Se tiene $\big(\frac{\operatorname{sen} z}{z}\big)^{2019} = \big(1 - \frac{1}{3!}z^2 + O(z^4)\big)^{2019} = 1 - \frac{2019}{3!}z^2 + O(z^4)$, por el binomio de Newton, ya que $\big(1 + O(z^4)\big)^k = 1 + O(z^4)$. Además sabemos $\wp'(z) = -2/z^3 + O(z)$, por tanto el coeficiente de z^{-1} en la función del enunciado es $3 \cdot (-2) \cdot \frac{-2019}{3!} = 2019$.

2) Sustituyendo el q indicado, $\big(1 + q^{2n-1}e^{2\pi iz}\big)\big(1 + q^{2n-1}e^{-2\pi iz}\big)$ es

$$\big(1 + 5^{1/2-n}e^{2\pi iz}\big)\big(1 + 5^{1/2-n}e^{-2\pi iz}\big) = 1 + 5^{1/2-n}\big(e^{2\pi iz} + e^{-2\pi iz}\big) + 5^{1-2n}$$

por tanto con $e^{2\pi iz} = i$, por ejemplo $z = 1/4$, el segundo miembro cuadra y falta ver que el primer miembro es $\theta(1/4) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} i^n 5^{-n^2/2}$. Los términos n y $-n$ se anulan si n es impar y resulta $\sum_{n\in\mathbb{Z}} i^{2n}5^{-(2n)^2/2}$ que da la serie del enunciado.

3) La función $g(z) = (f(z) - f(0) - f'(0)z)/z^2$ tiene una singularidad evitable en el origen porque $f''(0) = 0$ y es entera completando la definición con $g(0) = 0$. Además $|f(z)| < |z|^2 + 1$ asegura que está acotada así pues el teorema de Liouville implica que es idénticamente nula.

Criterios de corrección y comentarios

1) Poner verdadero o falso sin explicaciones correctas no cuenta nada. La mayor parte debéis repasar qué es el radio de convergencia y cómo se halla. El a) era similar al 2) de la hoja 1 pero pocos lo resolvéis. Unos cuantos probáis que f cumple $f^{(n)}(0) = 0$. Eso es imposible pues recordad que las funciones holomorfas son analíticas (desarrollables en serie) e implicaría $f = 0$. Otra cosa que me choca es que algunos creéis que para hallar el radio de convergencia hay que calcular el límite de $f(z)$ cuando $z \to \infty$, lo cual no tiene nada que ver.

El b) es, como se ve en la solución, consecuencia directa del Teorema 3.1 en el resumen y exactamente lo que se usa en la reducción inicial de su prueba. Utilizar la relación $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ no es muy conveniente pero factible y por supuesto no está penalizado si se ha hecho bien (lo cual ocurre en pocos casos).

En c) cuenta algo acercarse a la solución usando series aunque no se llegue a resolver. En principio la fórmula con derivadas para los residuos se puede aplicar pero no es recomendable y nadie de los que lo ha intentado así ha llegado a la solución.

2) Era posible resolverlo con una elección de q diferente de la de la sugerencia pero, a mi juicio, es algo más difícil. Por otro lado, seguir la indicación pero tomar $z = 1/2$ no lleva a ningún sitio y no lo he puntuado. He dado hasta 0.5 si se ensayan algunos otros valores de z intentando cuadrar ambos miembros.

3) Este ejercicio es un caso particular del 12) de la primera hoja. Decir que $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right| \le |z|^2 + 1$ implica $a_n = 0$ para $n \ge 3$ es casi como suponer el resultado. Justo es eso lo que hay probar cuando la serie define una función entera. Esto no es obvio y en variable real no es cierto, $|\operatorname{sen} x| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \le |x|^2 + 1$ no implica que $\operatorname{sen} x$ sea un polinomio. Tampoco es válido dar por supuesto que $|f(z)| < |z|^2 + 1$ implica que $|f''(z)| < 2$. Mi impresión es que los que aplican esto creen que sale derivando las desigualdades.