Problema especial 3 Variable compleja II 2018–2019

Instrucciones: El problema es voluntario y parte de la prueba de la identidad de Ramanujan descrita en la web del curso. Se puede realizar individualmente o en grupo pero en cualquier caso las redacciones deben ser personales y distintas. Una solución correcta completa de este problema especial añade 0.7 a la calificación. Una solución especialmente original se podrá premiar con una puntuación mayor.

Plazo y modo de entrega: Hasta el 13 de mayo (incluido), preferentemente en papel. Si por el contrario se usa el correo electrónico, enviaré confirmación.

---

1) Según el anterior problema especial, nos faltaba demostrar que en un entorno de $z=0$

$$F(z)=\frac{\pi}{I\sqrt{8}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2\pi nz)}{\cosh(\pi n)}\qquad\text{con}\quad I=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}\quad\text{y}\quad F(z)=\frac{\theta(1/2)\theta(z)}{\theta(0)\theta(z+1/2)}.$$

De hecho por el principio de identidad basta probarlo en un entorno real de 0.

Ya que no hay tiempo para más problemas especiales, vamos a dar dos cosas por supuesto. La primera es una consecuencia muy sencilla del desarrollo de Fourier: Para $x\in\mathbb{R}$

$$F(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\cos(2\pi nx)\qquad\text{con}\quad a_n=\int_0^1F(t)e^{-2\pi int}\,dt. \tag{1}$$

La segunda, mucho más profunda, es la fórmula de inversión de una integral elíptica: Para cierta constante C, en un entorno de $z=1/2$ se cumple

$$z=C\int_{G(z)}^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}\qquad\text{con}\quad G(z)=\frac{\theta^2(0)e^{\pi iz}\theta(z+i/2)}{\sqrt{2}\theta(1/2)\theta(i/2)\theta(z+1/2)}. \tag{2}$$

El resultado deseado es entonces combinación de los siguientes apartados:

a) (0.4 puntos) Si $\mathcal{P}$ es el paralelogramo de vértices 0, 1, i y $-1+i$ orientado positivamente, prueba

$$\int_0^1F(t)e^{-2\pi int}\,dt=\frac{1}{1+e^{2\pi n}}\int_{\partial\mathcal{P}}F(z)e^{-2\pi inz}\,dz=\pi i\frac{\operatorname{Res}(F,i/2)}{\cosh(\pi n)}.$$

Indicación: Usa las simetrías para comprobar que en $\int_{\partial\mathcal{P}}$ los lados de la derecha e izquierda cancelan sus contribuciones y para relacionar las de los lados inferior y superior.

b) (0.3 puntos) Demuestra que

$$\operatorname{Res}(F,i/2)=-i8^{-1/2}I^{-1}.$$

Indicación: Obtén la igualdad $\theta(0)\theta'\big((1+i)/2\big)=i\sqrt{8}\theta(1/2)\theta(i/2)I$ sustituyendo (2) y su derivada en $z=1/2$.