Instrucciones: El problema es voluntario y parte de la prueba de la identidad de Ramanujan descrita en la web del curso. Se puede realizar individualmente o en grupo pero en cualquier caso las redacciones deben ser personales y distintas. Una solución correcta completa de este problema especial añade 0.4 a la calificación. Una solución especialmente original se podrá premiar con una puntuación mayor.

Plazo y modo de entrega: Hasta el 27 de marzo (incluido), preferentemente en papel. Si, por el contrario, se usa el correo electrónico, enviaré confirmación.

1) Si $\tau = i$, prueba la identidad (la notación es como la empleada en clase, en caso de duda consulta el resumen en la web)

$$f(z) + f(iz) = 2 \qquad \text{donde} \quad f(z) = \frac{\theta^2(0)\theta^2(z+1/2)}{\theta^2(1/2)\theta^2(z)}.$$

Deduce de ello y del problema especial 1 que la identidad de Ramanujan (R) del enunciado general se obtiene si probamos que en algún entorno de $z = 0$ se cumple

$$\text{(F)} \qquad \frac{\theta(1/2)\theta(z)}{\theta(0)\theta(z+1/2)} = \frac{\pi}{I\sqrt{8}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n z)}{\cosh(\pi n)} \qquad \text{con} \quad I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Indicación. Es importante emplear que $\tau = i$, en otro caso la identidad es falsa en general. La manera más natural de proceder es probar que $f(z) + f(iz)$ define una función elíptica sin polos que en algún punto vale 2. Esto se sigue como en los casos de la teoría aunque hay un paso un poco más truculento. La identidad (F) no hay que probarla, es condicional. Basta ver que con lo anterior (F) $\Rightarrow$ (R). Esto es casi automático pero no del todo porque (F) solo se supone en un entorno indeterminado de cero.